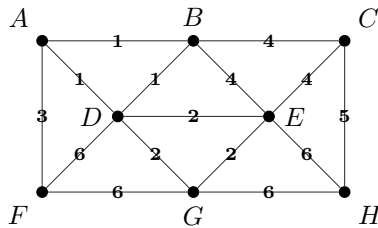


Minimális költség feszítőfák; Legrövidebb utak keresése

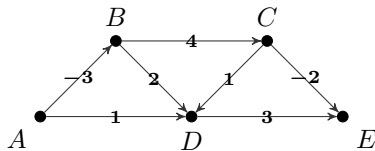
A számítástudomány alapjai 3. gyakorlat

2014. szeptember 26.

1. Hány különböző minimális súlyú feszítőfája van az ábrán látható gráfnak?



2. Milyen k pozitív egészekre adható meg olyan 2000 élű és 2000 csúcsú egyszerű összefüggő gráf, amire igaz a következő: G -ben a 2000 él közül adható egynek 2 egységnyi, 1999-nek pedig 1 egységnyi súly úgy, hogy a G -ből kiválasztható különböző minimális súlyú feszítőfák száma éppen k legyen? (A feszítőfák megkülönböztetések a gráf csúcsait címkézettnek tekintjük.)
3. A kormány tendert ír ki n településnek a helyi vízműre történő rácsatlakoztatására. Minden ajánlat két település (vagy egy település és a vízmű) között kiépítendő vezeték költségét tartalmazza. Tudjuk, hogy a kormány úgy választja ki a megépítendő vezetékeket és az azokat építő egyes vállalkozásokat, hogy a lehető legolcsóbban csatlakozzon az n település a vízműhöz. Cégünk különféle homályos üzletek nyélbeütésével igen olcsón meg tudná építeni a Rátótot és Piripócsot összekötő vezetéket, ráadásul minisztériumi kapcsolatunk, Mutyi bácsi elárulta nekünk az összes beérkezett ajánlatot. Hogyan árazzuk a saját Rátót-Piripócs ajánlatunkat, hogy a lehető legnyújtóbbat szakítsuk?
4. Bizonyítsuk be, hogy ha a $G = (V, E)$ gráf minden élének különböző a költsége, akkor G minimális költségű feszítőfája egyértelmű.
5. Adott a G irányítatlan gráf a következő éllistával: **a**: b, c ; **b**: a, d ; **c**: a, d ; **d**: b, c, e, f ; **e**: d, f, g ; **f**: d, e, g, h ; **g**: e, f, h ; **h**: f, g . Keressünk G -ben a -ból kiinduló szélességi feszítőfát! Mennyi lesz a csúcsok a -tól való távolsága?
6. Határozzuk meg az A csúcsból az összes többi csúcsba vezető legrövidebb út hosszát az alábbi gráfban a Bellman-Ford algoritmussal!



7. Törp falván kitört a járvány: ronda kórság fertőzött meg néhány törpöt. Szerencsére a betegségből minden törp egy nap alatt meggyógyul, és ezután egy napig immunissá válik, ám sajnos ezt követően újra fertőződhet. Kellemetlen, hogy a törpök még betegen sem adják fel azt a megrögzött szokásukat, hogy minden egyes nap minden barátjukat meglátogatják. Márpedig ha beteg és nem immunis törp találkozik, az utóbbi bizonyosan megfertőződik. Mutassuk meg, hogy ha Törp falván 100 törp él, akkor a járványnak a kitörését követő 101. napon már bizonyosan vége van.
8. Adjunk hatékony algoritmus, aminek a bemenete egy n csúcsú összefüggő irányítatlan gráf, a kimenet pedig egy olyan gráfcsúcs, amiből minden más csúcs lefeljebb $n/2$ élű úton elérhető.
9. Tegyük fel, hogy a G irányítatlan gráf tetszőleges szélességi kereséssel kapott feszítőfája csillag. Mit lehet mondani G -ről?