Euler- és Hamilton-körök

A számítástudomány alapjai
6. gyakorlat

2014. október 18.

Tétel. Egy összefüggő G gráfban akkor és csak akkor van Euler-kör, ha G minden pontjának fokszáma páros.

Tétel. Egy összefüggő G gráfban akkor és csak akkor van Euler-út, ha G-ben a páratlan fokszámú csúcsok száma 0 vagy 2.

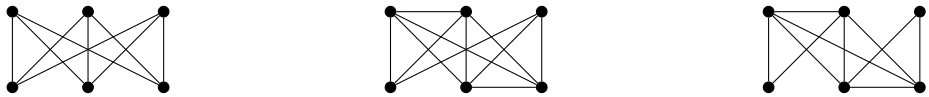
Tétel. Ha a G gráfban létezik k olyan pont, amelyeket elhagyva a gráf több, mint k komponensre esik szét, akkor nem létezik a gráfban Hamilton-kör.

Ha a G gráfban létezik k olyan pont, amelyeket elhagyva a gráf több, mint $k+1$ komponensre esik szét, akkor nem létezik a gráfban Hamilton-út.

Tétel (Dirac)**.** Ha az n pontú G gráfban minden pont foka legalább $n/2$, akkor a gráfban létezik Hamilton-kör.

Tétel (Ore)**.** Ha az n pontú G gráfban minden x, y nemszomszédos csúcsokra teljesül, hogy $d(x) + d(y) \geq n$, akkor a gráfban létezik Hamilton-kör.

1. Van-e Euler-kör, illetve Euler-út az alábbi gráfokban?



2. Mely $n \geq 2$ esetén tartalmaz Euler-kört, illetve Euler-utat az n csúcsú K_n teljes gráf?

3. Egy egyszerű G gráf csúcsait az $1, 2, \ldots, 100$ számok jelölik. Az i és j csúcsok között pontosan akkor vezet él G-ben, ha $|i - j| \leq 2$. Tartalmaz-e G Euler-kört, illetve Euler-utat?

4. Egy 12 egység hosszú drótból szeretnénk elkészíteni egy egységkocka élvázát úgy, hogy a kocka csúcsainál forrasztunk. Legkevesebb hány darabra kell felvágni ehhez az eredeti drótunkat? Mi a válasz akkor, ha a testátlóknak is benne kell lenniük az élvázban, és persze a kiindulási drótunk is 4 testátlónyival hosszabb?

5. Tegyük fel, hogy G egy összefüggő gráf, és hogy K egy olyan köre G-nek, amelynek tetszőleges élét törölve, a kapott út G egy leghosszabb útja lesz. Bizonyítsuk be, hogy ekkor K Hamilton-köre G-nek.

6. Bejárható-e az (a) 4×4-es, (b) 3×5-ös, (c) 3×6-os sakktábla egy huszárral úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk?

7. A G egyszerű gráfnak $2n + 1$ csúcsa van és minden csúcsának legalább n a foka. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van Hamilton-út!

8. Az $n \geq 3$ pontú K_n teljes gráfból töröltük egy feszítőfájának éleit, majd a feszítőfa élei közül visszaraktunk kettőt. Mutassuk meg, hogy az így nyert G gráf tartalmaz Hamilton-kört!

9. Egy 51 csúcsú összefüggő egyszerű gráfban egy csúcs foka 30, a többié 19.
   (a) Bizonyítsuk be, hogy a gráf komplementerében van Hamilton-kör.
   (b) Bizonyítsuk be, hogy az eredeti gráfhoz hozzá lehet venni 25 élet úgy, hogy a kapott gráf is egyszerű legyen, és legyen Euler-köre.

10. Mutassuk meg, hogy ha G egy 16 csúcsú 9-reguláris egyszerű gráf, akkor G-ből elhagyható 8 él úgy, hogy a maradék gráfnak legyen Euler-köre.

11. Bizonyítsuk be, hogy ha egy 3-reguláris G gráfban van Hamilton-kör, akkor G élei három színnel színezhetők úgy, hogy azonos színű éleknek ne legyen közös végpontjuk.

12. Egy társaságban bármely két embernek legalább két közös ismerőse van. Igaz továbbá, hogy bármely két ember vagy ismeri egymást, vagy a társaság bármely harmadik tagját legalább az egyikük ismeri. Bizonyítsuk be, hogy a társaság tagjai leültethetők egy (megfelelő méretű) kerek asztal köré úgy, hogy mindenki két ismerőse között ül.