Színezés, folyamok

A számítástudomány alapjai
7. gyakorlat

2014. október 31.

Def. A G egyszerű gráf csúcsainak egy színezésén színeknek a csúcsokhoz való olyan hozzárendelését értjük, melyben szomszédos csúcsok különböző színt kapnak. A G egyszerű gráf kromatikus száma $\chi(G) = k$, ha G k színnel kiszínezhető, de $k-1$ színnel nem.

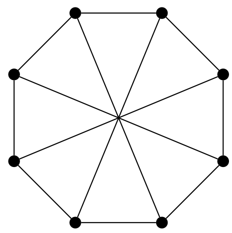
Tétel. Minden G gráfra $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ teljesül.

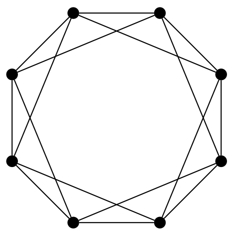
Def. A G gráf egy teljes részgráfját klikknek nevezzük. A G-ben található maximális méretű klikk méretét $\omega(G)$-vel jelöljük és a gráf klikkszámának nevezzük.

Tétel. Minden G gráfra $\chi(G) \geq \omega(G)$ teljesül.

Tétel (Ford–Fulkerson)**.** Tetszőleges hálózatban a maximális folyamnagyság megegyezik a minimális vágáskapacitással.

1. Határozzuk meg az alábbi gráfok kromatikus számát!





2. Legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, és legyen $ij \in E(G)$, ha $|i - j| \leq 7$. Mennyi az így meghatározott G gráf kromatikus száma?

3. Lgyenek a G gráf csúcsai a sakktábla mezői. Két mező között akkor fusson él, ha a huszár (bástya, futó, vezér) egy lépésben az egyik mezőről a másikra léphet. Mennyi a G gráf kromatikus száma?

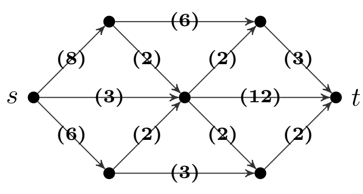
4. Legyenek $G_1 = (V, E_1)$, $G_2 = (V, E_2)$ tetszőleges (véges) gráfok, és legyen $G = (V, E_1 \cup E_2)$. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq \chi(G_1)\chi(G_2)$.

5. Mutassuk meg, hogy ha G véges, egyszerű gráf, akkor $|V(G)| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$, ahol $\alpha(G) = k$, ha G-ben van k db páronként nem szomszédos csúcs, de $k+1$ már nincs.

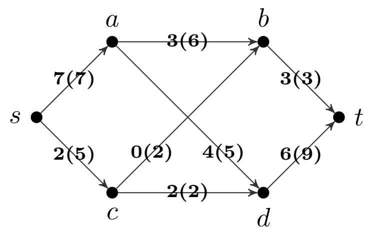
6. Mik azok a véges, egyszerű G gráfok, melyekre $\chi(G) = 3$ és tetszőleges $e \in E(G)$ esetén $\chi(G - e) < 3$?

   Milyen véges, egyszerű G gráfra teljesül, hogy $\chi(G) = 3$ és tetszőleges $v \in V(G)$ esetén $\chi(G - v) < 3$?

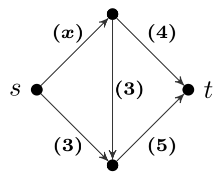
7. Adjunk meg egy maximális folyamot az alábbi hálózatokban, és bizonyítsuk be, hogy nagyobb folyam nem lehetséges.



8. Növeljük a megadott folyamot, ha ez lehetséges, vagy mutassuk meg, hogy ez már egy maximális folyam!



9. Határozzuk meg a nemnegatív valós x függvényében a maximális folyam értékét az alábbi hálózatban.



10. Adott a D irányított gráf valamint élein egy c kapacitásfüggvény. Bizonyítsuk be, hogy ha s, t és w a D olyan csúcsai, hogy létezik D-ben m nagyságú st-folyam és m nagyságú tw folyam is, akkor D-ben létezik m nagyságú sw folyam.

11. Egy (G, s, t, c) hálózatban minden él piros, fehér, vagy zöld. Ha csak a piros és fehér, vagy csak a piros és zöld, vagy csak a fehér és zöld éleket tekintjük, akkor a kapott hálózatokban a maximális nagyságú st-folyam nagysága 10. Bizonyítsuk be, hogy a teljes hálózatban a maximális nagyságú st-folyam nagysága legalább 15.