Párosítások, görög betűk, síkbarajzolható gráfok

A számítástudomány alapjai
8. gyakorlat

2014. november 7.

Tétel (Frobenius-tétel)**.** Egy $G = (A, B, E)$ páros gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha $|A| = |B|$ és minden $X \subseteq A$ részhalmazra $|X| \leq |N(X)|$ teljesül.

Tétel (Hall-tétel)**.** Egy $G = (A, B, E)$ páros gráfban akkor és csak akkor van A-t lefedő párosítás, ha minden $X \subseteq A$ részhalmazra $|X| \leq |N(X)|$ teljesül.

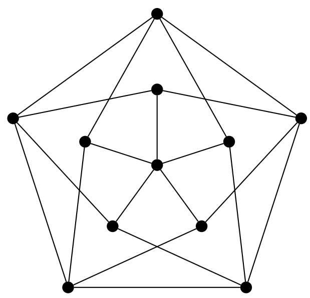
Tétel (Euler-formula)**.** Ha egy összefüggő síkgráfnak n csúcsa, e éle és t tartománya van, akkor teljesül rá, hogy $n - e + t = 2$.

Tétel. Ha a G egyszerű síkgráfnak legalább 3 csúcsa van, akkor az előbbi jelölésekkel $e \leq 3n - 6$.

Tétel (Kuratowski-tétel)**.** Egy gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz olyan részgráfot, amely topologikusan izomorf $K_{3,3}$-mal vagy K_5-tel.

1. A G gráf egyszerű, összefüggő, 100 csúcsa van és van benne 25 élű párosítás. Igazoljuk, hogy $\omega(\overline{G}) \leq 75$.

2. Határozzuk meg az alábbi gráfban a $\tau(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ és $\alpha(G)$ értékeket!



3. A G gráf csúcsai v_1, v_2, …, v_{40}. A v_i és v_j pontok akkor és csak akkor vannak éllel összekötve, ha $|i - j| = 3$ vagy $|i - j| = 5$. Határozzuk meg a $\tau(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ és $\alpha(G)$ értékeket!

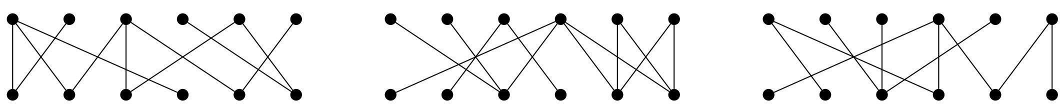
4. Egy 12 fiúból és 12 lányból álló társaságban mindenki legalább 6 embert ismer az ellenkező neműek közül (az ismeretségek kölcsönösek). Bizonyítsuk be, hogy ekkor az egész társaság egymást ismerő fiú-lány párokba állítható.

5. Egy kiránduláson a résztvevő n házaspár között akarunk szétosztani $2n$ különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy mindenki legalább n fajtát szeret a csokoládék közül, és hogy minden csokoládét minden házaspárnak legalább az egyik tagja szereti. Bizonyítsuk be, hogy a csokoládék kioszthatók úgy, hogy mindenki olyat kapjon, amilyet szeret.

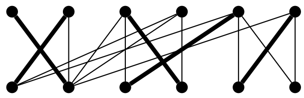
6. G egy páros gráf, A és B osztályokkal, és minden $X \subseteq A$ halmazra $N(X) \geq |X| - 1$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz olyan párosítást, ami A-t egy pont kivételével lefedi.

7. A villamosmérnök-hallgatók számára beüzemeltek néhány számítógépet. Minden hallgatónak legalább 10 gépre van belépési jogosultsága, minden gépen pedig legfeljebb 7 hallgatónak van felhasználói fiókja. Igaz-e, hogy ekkor bizonyosan leültethetünk minden villamosmérnök-hallgatót egy-egy különböző számítógéphez úgy, hogy mindenki olyan géphez üljön, amire be tud lépni?

8. Határozzuk meg a maximális párosítás méretét az alábbi gráfokban.



9. Keressünk a megadottnál nagyobb méretű párosítást az alábbi gráfban!



10. Hány csúcsa van annak a síkgráfnak, amit három háromszög-, három négyszög- és egy ötszöglap határol?
11. Síkbarajzolhatók-e a K_6, $K_{4,2}$, $K_{4,3}$, $K_5 - e$, $K_{3,3} - e$, $\overline{C_7}$ gráfok?
12. Mutassuk meg, hogy ha $|V(G)| \geq 11$, akkor G és $\overline{G}$ egyike biztosan nem síkgráf.
13. Egy gráfban minden pont foka legfeljebb 3, és minden köre legfeljebb 5 hosszú. Mutassuk meg, hogy a gráf síkgráf!
14. Mutassuk meg, hogy a K_5, K_6, K_7 és a $K_{3,3}$ gráfok mindegyike tóruszra (úszógumira) rajzolható. Bizonyítsuk be, hogy ha a G gráf síkbarajzolható, és G-be behúzunk egy e élt, akkor a kapott $G + e$ gráf tóruszra rajzolható.