

Síkbarajzolható gráfok, számelmélet

A számítástudomány alapjai

9. gyakorlat

2014. november 14.

1. Mutassuk meg, hogy ha a G síkgráf minden lapját páros számú él határolja, akkor G páros gráf.
2. Mutassunk olyan síkgráfot, ami nem duálisa a duálisának.
3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges síkbarajzolható, összefüggő G gráf tartományai pontosan akkor színezhetők kis két színnel sakktáblaszerűen, ha G -nek létezik Euler-körsétája.
4. A G síkgráfnak van Euler-körsétája. Igazoljuk, hogy G^* páros gráf!
5. Bizonyítsuk be, hogy ha a G síkgráfnak van Hamilton-köre, akkor a tartományai 4 színnel színezhetők úgy, hogy a szomszédos tartományok különböző színűek legyenek!
6. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n számra
 - (a) $6 \mid n^3 - n$
 - (b) $5 \mid 2^{4n+1} + 3$;
 - (c) $19 \mid 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$.
7. Mely p prímekekre lesz
 - (a) $p + 10$ és $p + 14$ prím?
 - (b) $p^2 + 2$ prím?
 - (c) $p^2 + 4$ és $p^2 + 6$ prím?
8. Legyenek a és b természetes számok. Bizonyítsuk be, hogy ha $11 \mid 3a + 4b$, akkor $11 \mid a + 5b$.
9. Számítsuk ki az euklideszi algoritmus segítségével a legnagyobb közös osztókat:
 - (a) $(899, 493)$;
 - (b) $(24961, 9483)$.
10. Egy faluban négyszáz család él, 1-től 400-ig számozott házakban. A Mikulás megérkezik a krampuszaival a faluba. Az első krampusz minden házba visz egy ajándékot. A második krampusz csak minden második házba visz ajándékot (azaz az elsőbe nem, a másodikba igen, stb.), majd a harmadik krampusz minden harmadik házba és így tovább, végül az utolsó krampusz már csak az utolsó házba. Hány család kap páratlan sok ajándékot?
11. Melyik az a legkisebb pozitív egész, aminek pozitív osztói száma 10-zel osztható?