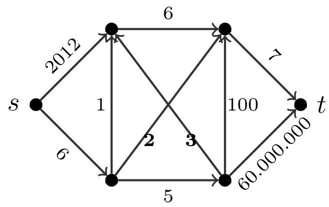
Gyakorlás

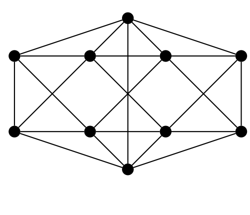
A számítástudomány alapjai
Konzultáció

2014. november 20.

1. (a) Bizonyítsuk be, hogy az alábbi hálózatban a maximális folyam nagysága 12.
   (b) El lehet érni egyetlen él kapacitásának a megváltoztatásával, hogy a maximális folyam nagysága 13 legyen? (Ha igen, hogyan? Ha nem, miért nem?)
   (c) El lehet érni két él kapacitásának a megváltoztatásával, hogy a maximális folyam nagysága 14 legyen? (Ha igen, hogyan? Ha nem, miért nem?)



2. Egy hálózatban minden él kapacitása hárommal osztható egész szám. Döntsük el (és indokoljuk is meg), hogy az alábbi állítások közül melyek azok, amelyek mindig teljesülnek.
   (a) Minden vágás kapacitása osztható hárommal.
   (b) Minden folyam értéke osztható hárommal.
   (c) Minden maximális folyam értéke osztható hárommal.
   (d) Minden maximális folyam minden élén a folyamérték osztható hárommal.
3. Tegyük fel, hogy a G páros gráfban az A és B színosztályok mérete azonos, továbbá, hogy A tetszőleges nemüres X részhalmazára igaz az $|N(X)| \geq |X| + 1$ feltétel. Mutassuk meg, hogy G bármely e éléhez létezik G-nek e-t tartalmazó teljes párosítása.
4. G egy páros gráf, A és B színosztályokkal. A-ban minden pont foka 40, B-ben 30.
   (a) Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz A-t fedő párosítást.
   (b) Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz 10 éldiszjunkt A-t fedő párosítást.
5. Tekintsük az összes olyan G 100 csúcsú gráfot, amelyeknél a lefogó pontok minimális száma $\tau = 3$. Mennyi az élek számának maximuma, illetve minimuma?
6. Tegyük fel, hogy $\nu(G) = 2$ és $\tau(G) = 4$. Bizonyítsuk be, hogy $3 \leq \chi(G) \leq 5$.
7. Tegyük fel, hogy a G gráf 4-színezhető és véges. Igazoljuk, hogy kiválasztható G éleinek legfeljebb hatodrésze úgy, hogy a kiválasztott élek G-ből való törlésével kapott G' gráf 3-színezhető legyen.
8. Síkbarajzolható-e az alábbi gráf?



9. Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráf három olyan feszítőfát tartalmaz, amiknek nincs közös éle. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G-nek van K_5-tel vagy $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfja!
10. Számítsuk ki a $10! + 99$ és $9! + 9$ számok legnagyobb közös osztóját.

11. Tegyük fel, hogy az $n > 5$ egész szám pozitív osztóinak összege $\sigma(n) = n + 1$. Mutassuk meg, hogy n szomszédainak pozitív osztói összegére $\sigma(n-1) + \sigma(n+1) \geq 3n + 6$ teljesül.

12. Döntsük el, hogy megoldhatók-e az alábbi lineáris kongruenciák, és a megoldhatóakat oldjuk meg.

    (a) $3x \equiv 5 \pmod 7$

    (b) $14x \equiv 8 \pmod{21}$

    (c) $11x \equiv 12 \pmod{18}$

13. Oldjuk meg az alábbi lineáris kongruenciákat:

    (a) $202x \equiv 157 \pmod{203}$

    (b) $91x \equiv 252 \pmod{35}$

    (c) $152x \equiv 88 \pmod{66}$

14. Milyen maradékot ad a 31-gyel osztva, ha $a^{100} \equiv 5 \pmod{31}$ és $a^{101} \equiv 19 \pmod{31}$?