Leszámlálási feladatok

A számítástudomány alapjai
1. gyakorlat

Ismétlés nélküli permutáció

Adott n db különböző elem összes lehetséges sorrendje

$$n! := \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 0, \\ n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1, & \text{ha } n > 0. \end{cases}$$

Ismétléses permutáció

Adott n db elem között az azonosak száma $k_1, k_2, \ldots, k_l$ (tehát $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_l$); ezek összes lehetséges sorrendje

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_l!}.$$

Ismétlés nélküli variáció

Adott n db különböző elem közül k db-ot kiválasztva és sorba rendezve az n db elem k-ad rendű ismétlés nélküli variációit kapjuk. Ezek száma

$$V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Ismétléses variáció

Ha adott n db különböző elem közül választhatunk k helyre úgy, hogy megengedünk ismétlődő elemeket is, akkor a kapott eseteket az n db elem k-ad rendű ismétléses variációinak nevezzük. Ezek száma

$$V_{\text{ism}}(n,k) = n^k.$$

Ismétlés nélküli kombináció

Ha adott n db különböző elem közül kiválasztunk k db-ot úgy, hogy a sorrendre nem vagyunk tekintettel, akkor a kiválasztásokat az n db elem k-ad rendű ismétlés nélküli kombinációinak nevezzük. Ezek száma

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Ismétléses kombináció

Ha n db különböző elemből kiválasztunk k db-ot úgy, hogy egy elem többször is választható és a sorrendre nem vagyunk tekintettel, akkor a kiválasztásokat az n db elem k-ad rendű ismétléses kombinációinak nevezzük. Ezek száma

$$C_{\text{ism}}(n,k) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Binomiális tétel

Tetszőleges $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

1. A $0, 1, 3, 5, 8$ számjegyekből hányféle
   (a) ötjegyű számot lehet alkotni, ha minden számjegyet csak egyszer használhatunk fel?
   (b) hatjegyű számot lehet alkotni (egy számjegyet többször is felhasználhatunk)?
   (c) öttel osztható ötjegyű számot lehet alkotni, ha minden számjegyet csak egyszer használhatunk fel?
2. Az összes lehetséges módon kitöltött lottószelvények között hány egy-, két-, három-, négytalálatos szelvény van?
3. Hányféleképp lehet 5 házaspárt leültetni egy 10 székből álló széksorba, ha a házastársaknak közvetlenül egymás mellé kell ülniük? Mi a válasz 13 székre?
4. 10 házaspár elment tangózni. Hányféleképpen alkothattak 10 táncospárt, ha mindenki ellenkező neművel táncolt és a 10 táncospár közül pontosan 7 tagjai alkottak egyben házaspárt is?

5. Hányféleképpen lehet kiolvasni a METAMATEMATIKA szót, ha csak jobbra és lefelé haladhatunk?

M	E	T	A	M	A	T	E
E	T	A	M	A	T	E	M
T	A	M	A	T	E	M	A
A	M	A	T	E	M	A	T
M	A	T	E	M		T	I
A	T	E	M	A	T	I	K
T	E	M	A	T	I	K	A

6. Hány különböző módon lehet a METAMATEMATIKA szó betűit egy kör mentén úgy elrendezni, hogy mind a 14 betűt pontosan egyszer használjuk fel? Két felírást akkor tekintünk azonosnak, ha egyik a másikból egy forgatással megkapható.
7. Hány olyan 10 hosszú dobássorozat van a dobókockával, melyben a dobott számok összege 3-mal osztható?
8. (a) Hányféle olyan ötjegyű szám van, melynek számjegyei szigorú monoton csökkenőek?
   (b) Hányféle olyan ötjegyű szám van, melynek számjegyei szigorú monoton növekvőek?
   (c) Hányféle olyan ötjegyű szám van, melynek számjegyei monoton csökkenőek?
   (d) Hányféle olyan ötjegyű szám van, melynek számjegyei monoton növekvőek?
9. Bizonyítsuk be, hogy $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.
10. Bizonyítsuk be, hogy nemüres halmaznak ugyanannyi páros elemszámú részhalmaza van, mint ahány páratlan!
11. Hány olyan 5-elemű részhalmaza van az $\{1, 2, \ldots, 10\}$ halmaznak, amelyikben több a páros szám, mint a páratlan?
12. Bizonyítsuk be, hogy
   (a) $$\binom{k}{k}\binom{n-k}{0} + \binom{k}{k-1}\binom{n-k}{1} + \binom{k}{k-2}\binom{n-k}{2} + \ldots + \binom{k}{0}\binom{n-k}{k} = \binom{n}{k},$$
   (b) $$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n},$$
   (c) $$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = 2^{n-1}n.$$
13. Hányféleképpen állhat fel fotózáshoz két egymás mögötti sorba 20 különböző magasságú ember úgy, hogy minden hátsó sorban álló magasabb legyen annál, aki az első sorban közvetlenül előtte áll?
14. Hány bástyát lehet elhelyezni úgy a sakktáblán, hogy egyik se üsse a másikat? Hányféleképpen helyezhető el ez a maximális számú bástya a sakktáblán úgy, hogy ne álljanak ütésben? (* Mik a válaszok futókra?)
15. 10 rabló egy rengeteg lakattal lezárható ládába gyűjti a rabolt kincset. Úgy szeretnék a ládát lelakatolni, és kiosztani a kulcsokat (egy lakathoz többen is kaphatnak kulcsot), hogy bármely 4 rabló ki tudja nyitni a ládát, de ez semelyik 3 rablónak ne sikerülhessen. Legalább hány különböző lakatot kell venniük a vasboltban, hogy ezt megtehessék? (* Hány lakat kell akkor, ha azt akarják, hogy a banditavezér bármely más rablóval kinyithassa a ládát (de egyedül ne), amúgy pedig a fenti szabály érvényesüljön?)