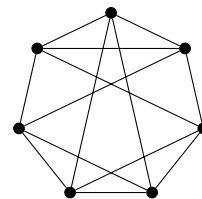
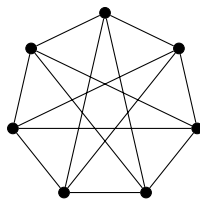
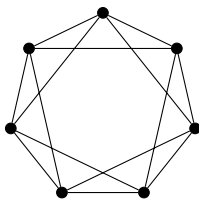


Gráfelméleti alapfogalmak

A számítástudomány alapjai

2. gyakorlat

1. Az előre megszámozott (címkézett) n darab pont közé hányféleképp húzhatunk be éleket úgy, hogy egyszerű gráfhoz jussunk?
2. Legyenek a G egyszerű gráf csúcsai az $1, 2, \dots, 10$ számok, és két különböző csúcs között akkor fusson él, ha a két szám különbsége páratlan. Hány 4 hosszú köre van a G gráfnak?
3. A G gráfnak $n + 3$ csúcsa van: ebből 3 piros (a, b, c) és n zöld ($v_1, v_2, \dots, v_n$). Két csúcs pontosan akkor szomszédos G -ben, ha a színük különbözik. Hány 6 pontú kör van a G gráfban?
4. Hány feszítőfája van a $K_{2,n}$ teljes páros gráfnak (a gráf csúcsai $a_1, a_2, b_1, b_2, \dots, b_n$, és tetszőleges $i \in \{1, 2\}$ és $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén az a_i és a b_j csúcs között vezet él)?
5. Van olyan G gráf, melyben minden csúcs foka különböző? És ha a gráf egyszerű?
6. Döntsük el, van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok foka rendre 1, 2, 2, 3, 3, 3 ill. 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4 ill. 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7 ill. 1, 3, 3, 4, 5, 6, 6.
7. Igazoljuk, hogy ha egy 6 csúcsú G gráf fokszámai 2, 2, 2, 4, 5, 5, akkor G nem egyszerű.
8. Mi lehet a G gráf, ha $\Delta(G) \leq 2$? ($\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszámát jelöli.)
9. Melyek izomorfak az alábbi gráfok közül?



10. Mutassunk a komplementerével izomorf 5-, ill. 6-pontú gráfot!
11. Hány pontja van annak a T fának, melyre $|E(\overline{T})| = 15 \cdot |E(T)|$?

12. Határozzuk meg az összes olyan (legalább két csúcsú) fát, amely izomorf a saját komplementerével. (Az egymással izomorf megoldásokat tekintsük azonosnak.)
13. Egy fában csak két különböző fokszám fordul elő: az egyik fajta 9-szer, a másik 92-szer. Mi a szóban forgó két fokszám?
14. Tegyük fel, hogy az F fának pontosan 333 levele van. Igazoljuk, hogy F -nek van olyan levéltől különböző v csúcs, aminek a fokszámára $d(v) \neq 5$ teljesül.
15. Tegyük fel, hogy az F fának csak első- és negyedfokú csúcsai vannak, szám szerint n_1 ill. n_4 . Igazoljuk, hogy $n_1 = 2 \cdot n_4 + 2$.
16. Bizonyítsuk be, hogy ha egy fába behúzunk egy élet, akkor pontosan egy kör keletkezik.
17. Egy 100 csúcsú összefüggő, egyszerű gráfnak 100 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor van a gráfban 3 páronként különböző feszítőfa. (Két feszítőfa akkor különböző, ha nem pontosan ugyanazon élek alkotják.)
18. Mutassuk meg, hogy ha T_1 és T_2 két fa ugyanazon a véges pont-halmazon, és e_1 a T_1 tetszőleges éle, akkor létezik T_2 -nek egy olyan e_2 éle, hogy $T_1 - e_1 + e_2$ és $T_2 - e_2 + e_1$ is fa.
19. Egy n csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább $n/2$. Következik-e ebből, hogy a gráf összefüggő?
20. A G gráfról tudjuk, hogy egyszerű, 10 csúcsa van, és ebből 9 csúcs fokszáma pontosan 5. Igazoljuk, hogy G összefüggő.
21. Egy 100 csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább 33. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzá lehet venni egyetlen új élet úgy, hogy a kapott gráf összefüggő legyen.
22. Igazoljuk, hogy ha v egy véges G gráf páratlan fokú csúcsa, akkor G -ben van olyan út, amely v -t a G egy másik páratlan fokú csúcsával köti össze.