

Euler-körséta, Hamilton-kör

A számítástudomány alapjai

6. gyakorlat

Tétel. Egy összefüggő G gráfban akkor és csak akkor van Euler-kör, ha G minden csúcsának foka páros.

Tétel. Egy összefüggő G gráfban akkor és csak akkor van Euler-út, ha G -ben a páratlan fokszámú csúcsok száma 0 vagy 2.

Állítás. Ha a G gráfban létezik k olyan csúcs, amelyeket elhagyva a gráf több, mint k komponensre esik szét, akkor nem létezik a gráfban Hamilton-kör.

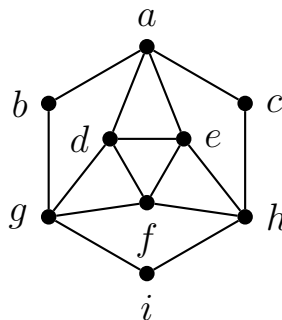
Ha a G gráfban létezik k olyan csúcs, amelyeket elhagyva a gráf több, mint $k + 1$ komponensre esik szét, akkor nem létezik a gráfban Hamilton-út.

Dirac-tétel. Ha az n csúcsú ($n \geq 3$) G gráfban minden pont foka legalább $n/2$, akkor a gráfban létezik Hamilton-kör.

Ore-tétel. Ha az n csúcsú ($n \geq 3$) G gráfban minden x, y nemszomszédos csúcsokra teljesül, hogy $d(x) + d(y) \geq n$, akkor a gráfban létezik Hamilton-kör.

Lemma. Ha az n csúcsú G gráf valamely u, v csúcsaira $d(u) + d(v) \geq n$ teljesül, akkor a G gráf pontosan akkor tartalmaz Hamilton-kört, ha a $G + uv$ gráf tartalmaz Hamilton-kört.

1. Van-e az ábrán látható gráfnak Euler-, illetve Hamilton-köre? Ha van, mi abban a csúcsok sorrendje?



2. Tegyük fel, hogy a G gráf bármely két csúcsa között vezet legfeljebb 7 élű út. Mutassuk meg, hogy ha a G -nek van Euler-sétája, akkor G -nek megduplázható legfeljebb 7 éle úgy, hogy az így kapott G' gráfnak Euler-körsétája legyen. (Egy e él megduplázásán azt értjük, hogy behúzzunk egy, az e éllel párhuzamos új élt.)
3. A G egyszerű gráfnak 33 piros, 777 fehér, 333 zöld, valamint 77 sárga csúcsa van. Két csúcs között pontosan akkor fut él, ha azok különböző színűek. Behúzható-e G -be néhány további él úgy, hogy olyan egyszerű gráfot kapjunk, aminek van Euler-sétája?
4. Bejárható-e az (a) 4×4 -es, (b) 3×5 -ös, (c) 3×6 -os sakktábla egy huszárral úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk?
5. Tegyük fel, hogy a 10 csúcsú, egyszerű G gráfban az egyes csúcsok fokszámai rendre 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 9, 9, 9. Bizonyítsuk be, hogy G -nek nincs Hamilton-köre. Mutassuk meg, hogy G -nek van Hamilton-köre, ha a csúcsok fokszámai 3, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6.

6. A G gráf egy 101 csúcsú „csillag” – vagyis az egyik csúcsa szomszédos az összes többivel, de a gráfnak ezen kívül több éle nincs. (Így tehát G -nek egy 100 fokú és száz 1 fokú csúcsa van.) Minimálisan hány élet kell hozzávenni G -hez, hogy a kapott gráfban legyen Hamilton-kör?
7. Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű G gráfnak 20 csúcsa van és bármely fokszáma legalább 12, akkor G -nek van két olyan Hamilton-köre, melyeknek nincs közös éle.
8. A G egyszerű gráfnak $2k + 1$ csúcsa van és minden csúcsának legalább k a foka. Bizonyítsuk be, hogy G -ben van Hamilton-út!
9. A G gráf csúcsai $v_1, v_2, \dots, v_n$. A $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ csúcsokról tudjuk, hogy mindegyiknek a foka legalább $n/2$. (Sajnos a v_n csúcsról ezt nem tudjuk.) Bizonyítsuk be, hogy van egy út G -ben a $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ csúcsokon.
10. Egy 51 csúcsú összefüggő egyszerű gráfban egy csúcs foka 30, a többié 19.
 - (a) Bizonyítsuk be, hogy a gráf komplementerében van Hamilton-kör.
 - (b) Bizonyítsuk be, hogy az eredeti gráfhoz hozzá lehet venni 25 élet úgy, hogy a kapott gráf is egyszerű legyen, és legyen Euler-körsétája.
11. Mutassuk meg, hogy ha G egy 16 csúcsú 9-reguláris egyszerű gráf, akkor G -ből elhagyható 8 él úgy, hogy a maradék gráfnak legyen Euler-köre.
12. Az $n \geq 3$ pontú K_n teljes gráfból töröltük egy feszítőfájának éleit, majd a feszítőfa élei közül visszaraktunk kettőt. Mutassuk meg, hogy az így nyert G gráf tartalmaz Hamilton-kört!
13. Kritikus a helyzet: Abszurdisztán fővárosát, Mutyipusztát savköpő menyétek inváziója fenyegeti. A jobb oldali ábrán látható a főváros térképe: az egyes utak mellett álló számok az adott útvonal hosszát jelölik. A veszélyt – mint mindig – most is az ügyeletes szuperhős, Órarugógerincű Felpattanó hárítja el. Mesteri tervének végrehajtása mellett (miszerint helikopterről lúgot permetezve semlegesíti a betolakodókat) még ebben a válságos pillanatban is a közvagyon megóvása a legfőbb célja. Ezért amellet, hogy minden utcát végigpermetez és visszatér a szabadon választott kiindulási pontra, szeretné egyúttal minimalizálni a lerepült össztávot is. Segítsünk Órarugógerincűnek abban, hogyan válasszon útvonalat!

