

Színezés

A számítástudomány alapjai 7. gyakorlat

Kromatikus szám

A G egyszerű gráf csúcsainak egy színezésén színeknek a csúcsokhoz való olyan hozzárendelését értjük, melyben szomszédos csúcsok különböző színt kapnak.

A G egyszerű gráf kromatikus száma $\chi(G) = k$, ha G k színnel kiszínezhető, de $k - 1$ színnel nem.

Klikk

A G gráf egy teljes részgráfját klikknek nevezzük. A G -ben található legnagyobb klikk méretét $\omega(G)$ -vel jelöljük és a gráf klikkszámának nevezzük.

Állítás

Minden G gráfra $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ teljesül.

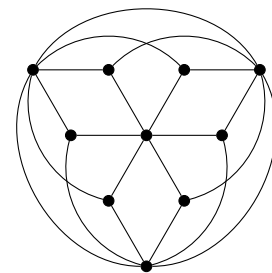
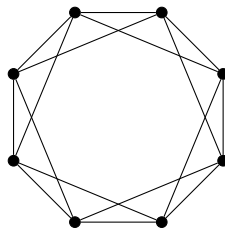
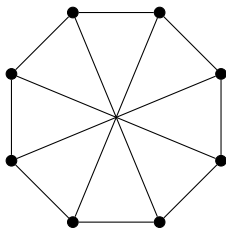
Páros gráf

A G gráfot párosnak nevezzük, ha 2 színnel színezhető, azaz $\chi(G) \leq 2$.

Állítás

A G gráf akkor és csak akkor páros, ha nem tartalmaz páratlan hosszú kört.

1. Határozzuk meg az alábbi gráfok kromatikus számát!



2. Legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$, és legyen $ij \in E(G)$, ha $|i - j| \leq 7$. Mennyi az így meghatározott G gráf kromatikus száma?
3. Készítsük el a G gráfot egy 7 hosszú körből úgy, hogy hozzáadunk a körhöz $\binom{7}{3}$ új csúcsot, és az új csúcsok mindegyikét a kör három pontjával kötjük össze úgy, hogy semelyik két új csúcsnak se ugyanazok a körbeli csúcsok legyenek a szomszédai. Határozzuk meg a G gráf $\chi(G)$ kromatikus számát.
4. Mik azok a véges, egyszerű G gráfok, melyekre $\chi(G) = 3$ és tetszőleges $e \in E(G)$ esetén $\chi(G - e) < 3$?
Milyen véges, egyszerű G gráfra teljesül, hogy $\chi(G) = 3$ és tetszőleges $v \in V(G)$ esetén $\chi(G - v) < 3$?

5. Legfeljebb mennyi lehet egy legfeljebb 100-élű egyszerű gráf kromatikus száma?
6. Tegyük fel, hogy G egy 100 pontú, egyszerű gráf, melynek komplementerében a maximális klikkméret $\omega(\overline{G}) = 10$, és G egy v pontjának foka pedig $d(v) = 92$. Mutassuk meg, hogy a G kromatikus számára fennáll a $\chi(G) \geq 11$ egyenlőtlenség.
7. Tegyük fel, hogy az 500 csúcsú, egyszerű G gráfnak 450 olyan csúcsa van, amelyek egyikének a fokszáma sem több 49-nél. Igazoljuk, hogy G kromatikus számára $\chi(G) \leq 50$ teljesül.