Páros gráfok, párosítások, görög betűk

A számítástudomány alapjai
9. gyakorlat

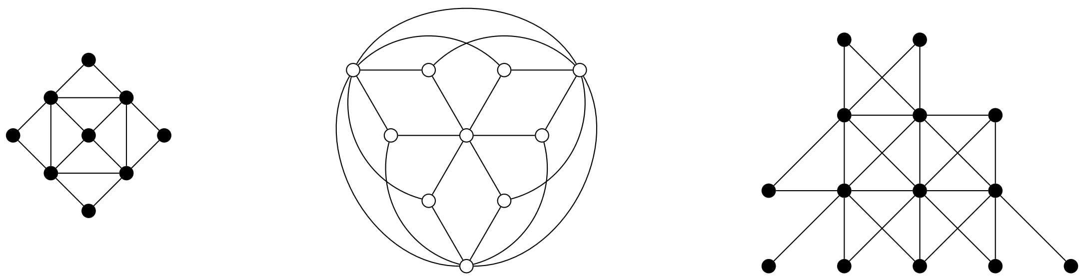
Frobenius-tétel

Egy $G = (A, B, E)$ páros gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha $|A| = |B|$ és minden $X \subseteq A$ részhalmazra $|X| \leq |N(X)|$ teljesül.

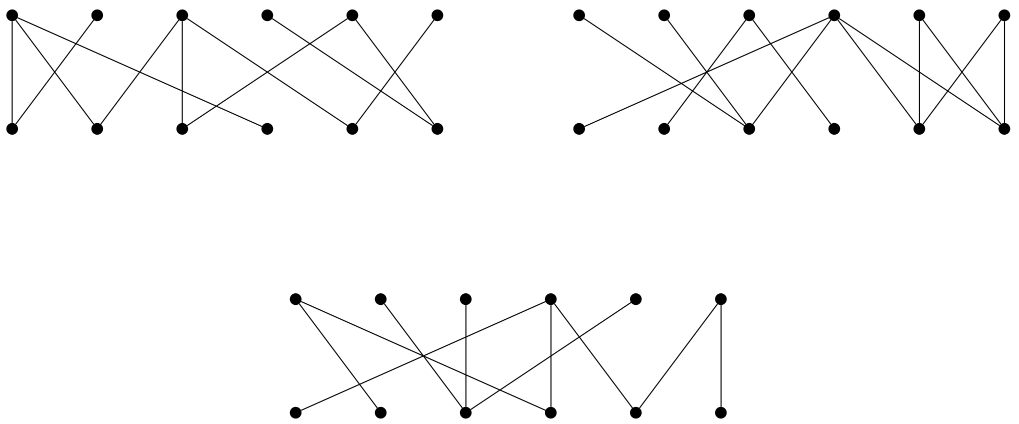
Hall-tétel

Egy $G = (A, B, E)$ páros gráfban akkor és csak akkor van A-t lefedő párosítás, ha minden $X \subseteq A$ részhalmazra $|X| \leq |N(X)|$ teljesül.

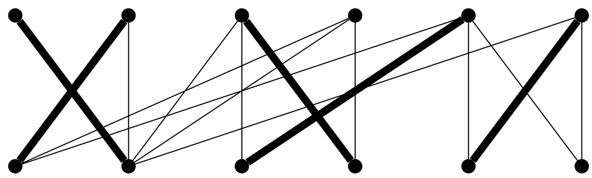
1. Adjunk meg egy maximális független élhalmazt és csúcshalmazt, valamint egy minimális lefogó csúcshalmazt és élhalmazt az alábbi gráfokban.



2. Határozzuk meg a maximális párosítás méretét az alábbi gráfokban.



3. Keressünk a megadottnál nagyobb méretű párosítást az alábbi gráfban!



4. A G gráf egyszerű, összefüggő, 100 csúcsa van és van benne 25 élű párosítás. Igazoljuk, hogy $\omega(\overline{G}) \leq 75$.

5. Igazoljuk, hogy tetszőleges véges G gráfra $\tau(G) \leq 2\nu(G)$ teljesül.

6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n-csúcsú, egyszerű G gráfra $\tau(G) - \nu(G) < \frac{n}{2}$ teljesül.
7. Tegyük fel, hogy a G egyszerű, páros gráf A színosztálya 28, a B színosztálya 33 pontú. Tegyük fel, hogy a B színosztálynak valemely Y részhalmazára $|Y| = 18$ és $|N(Y)| = 12$. Mutassuk meg, hogy az A színosztályra nem teljesül a Hall-feltétel, azaz létezik olyan $X \subseteq A$ halmaz, melyre $|N(X)| < |X|$.
8. Tegyük fel, hogy a 88 pontú G páros gráfban $\alpha(G) = 44$. Igazoljuk, hogy G-re teljesül a Hall-feltétel, azaz $|X| \leq |N(X)|$ az A színosztály minden X részhalmaza esetén.
9. Egy 12 fiúból és 12 lányból álló társaságban mindenki legalább 6 embert ismer az ellenkező neműek közül (az ismeretségek kölcsönösek). Bizonyítsuk be, hogy ekkor az egész társaság egymást ismerő fiú-lány párokba állítható.
10. Egy kiránduláson a résztvevő n házaspár között akarunk szétosztani $2n$ különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy mindenki legalább n fajtát szeret a csokoládék közül, és hogy minden csokoládét minden házaspárnak legalább az egyik tagja szereti. Bizonyítsuk be, hogy a csokoládék kioszthatók úgy, hogy mindenki olyat kapjon, amilyet szeret.
11. G egy páros gráf, A és B osztályokkal, és minden $X \subseteq A$ halmazra $N(X) \geq |X| - 1$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz olyan párosítást, ami A-t egy pont kivételével lefedi.
12. Legyen G egy olyan egyszerű gráf, amelynek 1000 csúcsa van és minden csúcs fokszáma legalább 6. Igazoljuk, hogy $\nu(G) \geq 6$.