Gráfelméleti alapfogalmak

A számítástudomány alapjai

1. gyakorlat

2022.

Kézfogás-lemma.

Tetszőleges $G = (V, E)$ véges gráf esetén $\sum_{v \in V} = 2|E|$, ahol $d(v)$ a v csúcs fokszámát jelöli.

Izomorfia.

A $G = (V, E)$ és $G' = (V', E')$ gráfokat izomorfnak nevezzük, ha mindkét gráf csúcsai megszámozhatók az $1, 2, \dots, n$ számokkal úgy, hogy tetszőleges $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén az i-vel és j-vel számozott csúcsok között pontosan ugyanannyi él fut G-ben és G'-ben.

Élhozzáadási lemma.

Legyen G egy tetszőleges gráf és G' egy olyan gráf, amelyet G-ből egy e él hozzávételével kapunk (azaz $G' = G + e$). Ekkor az alábbi két esetből pontosan az egyik valósul meg.

(1) Az e élen keresztül nincsen kör a $G + e$ gráfban, valamint a $G + e$ gráfnak eggyel kevesebb komponense van, mint G-nek.

(2) Az e élen keresztül van kör a $G + e$ gráfban, valamint a $G + e$ gráfnak ugyanannyi komponense van, mint G-nek.

Erdő.

Egy körmentes gráfot erdőnek nevezünk.

Fa.

Egy összefüggő, körmentes gráfot fának nevezünk.

Állítás.

Egy n-csúcsú, k-komponensű erdőnek $n - k$ éle van.

Speciálisan, egy n-csúcsú fának $n - 1$ éle van.

Állítás.

Egy gráf akkor és csak akkor összefüggő, ha létezik feszítőfája.

1. Döntsük el, van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok foka rendre

   (a) 1, 2, 2, 3, 3, 3, (b) 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, (c) 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, (d) 1, 3, 3, 4, 5, 6, 6.

2. Igazoljuk, hogy ha egy 6-csúcsú G gráf fokszámai $2, 2, 2, 4, 5, 5$, akkor G nem egyszerű.

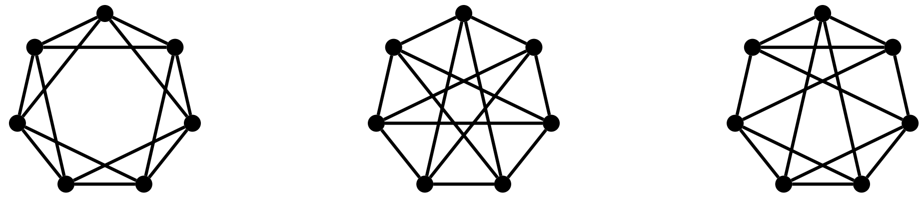
3. Van olyan G gráf, melyben minden csúcs foka különböző? És ha a gráf egyszerű?

4. Rajzoljuk le az összes olyan, páronként nem izomorf, egyszerű gráfot, melyre

   (a) $n = 4$, $m = 5$; (b) $n = 5$, $m = 3$; (c) $n = 5$, $m = 7$; (d) $n = 5$, $m = 8$;

   ahol n, illetve m jelöli a gráf csúcsainak, illetve éleinek a számát.

5. Melyek izomorfak az alábbi gráfok közül?



6. Mutassunk a komplementerével izomorf 5-, illetve 6-pontú gráfot.

7. Igazoljuk, hogy tetszőleges egyszerű gráf élei irányíthatók úgy, hogy ne keletkezzen irányított kör.

8. Hány pontja van annak a T fának, melyre $\left|E(\overline{T})\right| = 15 \cdot \left|E(T)\right|$?

9. Határozzuk meg az összes olyan (legalább kétcsúcsú) fát, amely izomorf a saját komplementerével. (Az egymással izomorf megoldásokat tekintsük azonosnak.)

10. Igazoljuk, hogy minden fa megkapható egy csúcsból kiindulva úgy, hogy minden lépésben egy új levelet adunk az addig felépített gráfhoz.

11. Egy fában csak két különböző fokszám fordul elő: az egyik fajta 9-szer, a másik 92-szer. Mi a szóban forgó két fokszám?

12. Tegyük fel, hogy az F fának pontosan 333 levele van. Igazoljuk, hogy F-nek van olyan levéltől különböző v csúcsa, amelynek a fokszámára $d(v) \neq 5$ teljesül.

13. Tegyük fel, hogy az F fának csak első- és negyedfokú csúcsai vannak, szám szerint n_1, illetve n_4. Igazoljuk, hogy $n_1 = 2 \cdot n_4 + 2$.

14. Egy 100-csúcsú, összefüggő, egyszerű gráfnak 100 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor van a gráfban 3 páronként különböző feszítőfa. (Két feszítőfa akkor különböző, ha nem pontosan ugyanazon élek alkotják.)

15. Mutassuk meg, hogy ha T_1 és T_2 két fa ugyanazon a véges ponthalmazon és e_1 a T_1 tetszőleges éle, akkor létezik T_2-nek egy olyan e_2 éle, hogy $T_1 - e_1 + e_2$ és $T_2 - e_2 + e_1$ is fa.

16. Egy n-csúcsú, egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább $n/2$. Következik-e ebből, hogy a gráf összefüggő?

17. A G gráfról tudjuk, hogy egyszerű, 10 csúcsa van, és ebből 9 csúcs fokszáma pontosan 5. Igazoljuk, hogy G összefüggő.

18. Egy 100-csúcsú, egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább 33. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzá lehet venni egyetlen új élet úgy, hogy a kapott gráf összefüggő legyen.

19. Igazoljuk, hogy ha v egy véges G gráf páratlan fokú csúcsa, akkor G-ben van olyan út, amely v-t a G egy másik páratlan fokú csúcsával köti össze.

20. Hány feszítőfája van a

    (a) K_1, K_2, K_3, K_4, illetve K_5 gráfoknak;

    (b) $K_{2,n}$ teljes páros gráfnak (a gráf csúcsai $a_1, a_2, b_1, b_2, \ldots, b_n$, és tetszőleges $i \in \{1, 2\}$ és $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén az a_i és a b_j csúcs között vezet él)?

21. Igazoljuk, hogy minden összefüggő gráfnak van olyan csúcsa, amelyet elhagyva a gráf összefüggő marad.

22. Egy $n \times n$ méretű T táblázatnak nincs két egyforma sora. Bizonyítsuk be, hogy T-nek van olyan oszlopa, aminek törlése után a kapott táblázatban továbbra sincs két egyforma sor.