Determináns

A számítástudomány alapjai

10. gyakorlat

2022.

Permutáció.

A $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ n-tagú számsorozatot permutációnak nevezzük, ha az $1, \dots, n$ számok mindegyikét pontosan egyszer tartalmazza. Az n-edfokú permutációk halmazát S_n jelöli.

Inverzió.

A $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ permutációban a π_i és a π_j tagok inverzióban állnak, ha $i < j$, de $\pi_i > \pi_j$. A π permutáció inverziószáma az összes inverzióban álló számpárok száma. Ennek jele $I(\pi)$.

Determináns.

Az $n \times n$-es A mátrix determinánsának a $\det(A) = \displaystyle\sum_{\pi \in S_n} (-1)^{I(\pi)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)}$ értéket nevezzük.

Tétel.

Legyen A egy $n \times n$-es mátrix. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

(i) Ha A felső/alsó háromszögmátrix, akkor $\det(A)$ a főátlóbeli elemek szorzata.

(ii) Ha A egy sora/oszlopa csupa nulla, akkor $\det(A) = 0$.

(iii) Ha A egy sorát/oszlopát λ-val végigszorozzuk, akkor a determináns is λ-val szorzódik.

(iv) Ha A két sorát/oszlopát felcseréljük, akkor a determináns előjelet vált.

(v) Ha A két sora/oszlopa megegyezik, akkor $\det(A) = 0$.

(vi) Ha A egy sorának/oszlopának λ-szorosát hozzáadjuk egy másik sorhoz/oszlophoz, akkor a determináns nem változik.

Előjeles aldetermináns.

Az $n \times n$-es A mátrix a_{ij} eleméhez tartozó A_{ij} előjeles aldeterminánst úgy kapjuk, hogy az A mátrixból elhagyjuk az i-edik sorát és a j-edik oszlopát, majd a kapott $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix determinánsát megszorozzuk $(-1)^{i+j}$-nel.

Kifejtési tétel.

Ha az $n \times n$-es A mátrix valamelyik sorának, vagy oszlopának minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldetermináns értékével és a kapott n darab kéttényezős szorzatot összeadjuk, akkor A determinánsának értékét kapjuk.

1. Határozzuk meg az alábbi permutációk inverziószámát.

   (a) $(1, 3, 5, 7, 9, 8, 6, 4, 2)$

   (b) $(n, n-1, \dots, 2, 1)$

   (c) $(21, 22, \dots, 30, 11, 12, \dots 20, 1, 2, \dots, 10)$

2. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét a determináns definíciója szerint.

   (a)
$$\begin{vmatrix} -5 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ -4 & 9 & 0 & 7 & 3 \\ 6 & 5 & -2 & -6 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

   (b)
$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 5 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 9 & 0 & 8 & 6 \end{vmatrix}$$

3. Számoljuk ki az alábbi determinánsok értékét.

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \\ -3 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 9 & -8 \\ -4 & 4 & 1 & -8 & 3 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & 4 & 11 & -7 \\ -3 & 9 & -5 & -9 & 5 \\ 4 & -12 & 8 & 13 & -2 \\ 5 & -11 & 10 & -1 & -12 \end{vmatrix}$$

(c)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 8 \\ 7 & 2 & 9 & 8 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

(d)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}$$

4. Számoljuk ki az alábbi determinánsok értékét a kifejtési tétel felhasználásával.

(a)

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

5. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat a p valós paraméter minden értékére.

(a)

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 5 & p \\ 6 & p & 4 & 0 \\ 7 & 2 & p & 0 \\ 6 & p & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} p & 2p & p & 3p \\ 3 & 9 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 7 & 1 \\ 3 & 7 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

6. Legyen A egy nem 0 determinánsú, 9×9-es mátrix, A' pedig az a mátrix, amit A-ból az első sor λ-val való szorzásával kapunk. Mennyi lehet λ értéke, ha tudjuk, hogy $\det(A') = \det(\lambda A)$?

7. Egy $n \times n$-es A mátrixban az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem $a_{ij} = i^2 j^2 + 1$. Határozzuk meg A determinánsát.

8. Legyen $\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)$ az $1, 2, \dots, n$ számok egy tetszőleges permutációja. Készítsük el az $n \times n$-es A mátrixot a következőképpen: minden $i = 1, 2, \dots, n$-re a mátrix i-edik sorában a $\pi(i)$-edik helyen és attól jobbra mindenhol álljon 1-es, a $\pi(i)$-edik helytől balra pedig mindenhol álljon 0. Határozzuk meg A determinánsát.

9. Egy 101×101-es A mátrixban az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem

$$a_{ij} = \begin{cases} 3^{2004}\text{-nek a } (2i+j)\text{-edik számjegye}, & \text{ha } i \cdot j \text{ páros}, \\ 0, & \text{ha } i \cdot j \text{ páratlan}. \end{cases}$$

Határozzuk meg A determinánsát.

10. Az alábbi A mátrixra $\det A = 45653$. Mennyi $\det B$ értéke?

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 8 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 7 & 6 & 9 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 8 & 3 \\ 8 & 3 & 0 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 9 & 8 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 1 & 7 & 3 & 9 \\ 6 & 8 & 3 & 2 & 8 & 6 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 7 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 9 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

11. Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{vmatrix} 1849 & 1444 & 1896 & 1222 \\ 1490 & 1703 & 1790 & 1526 \\ 1342 & 1566 & 1541 & 1514 \\ 1242 & 1552 & 1382 & 1825 \end{vmatrix} \neq 0.$$