Műveletek mátrixokkal, lineáris leképezések

A számítástudomány alapjai

11. gyakorlat

2022.

Determinánsok szorzástétele.

Ha A, B $n \times n$-es valós mátrixok, akkor $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Lineáris leképezés.

Az $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ függvényt lineáris leképezésnek nevezzük, ha tetszőleges $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(i) $f(\underline{x} + \underline{y}) = f(\underline{x}) + f(\underline{y})$,

(ii) $f(\lambda \cdot \underline{x}) = \lambda \cdot f(\underline{x})$.

Tétel. Az $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ függvény akkor és csak akkor lineáris leképezés, ha létezik olyan $(k \times n)$-es A mátrix, melyre minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén $f(\underline{x}) = A\underline{x}$ teljesül.

Ekkor f mátrixa egyértelmű: tetszőleges $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén az i-edik oszlopa $f(\underline{e}_i)$.

1. Határozzuk meg az $(1, 2, 1)$ és a $(5, 2, 4)$ vektorok skaláris szorzatát.

2. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ és $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Adjuk meg az AB, BA, $A \cdot A^\top$, $AB + 2C$ mátrixokat.

3. (a) Számítsuk ki az A^{2015} mátrixot az alábbi A mátrixra.
   (b) Számítsuk ki $\det\left(B^{2015}\right)$ értékét az alábbi B mátrixra.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Léteznek-e olyan 2×2-es A és B mátrixok, melyekre $A^2 = B^2$, de $A \neq B$ és $A \neq (-1) \cdot B$?

5. Az A mátrix minden eleme 0, 1 vagy -1, és a 0-tól különböző elemeinek száma 2012. Határozzuk meg az $A \cdot A^\top$ mátrix főátlójában álló elemeknek az összegét.

6. Lineáris leképezések-e az alábbi $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ függvények? Ha igen, akkor írjuk fel a leképezés $[f]$ mátrixát.
   (a) $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x, y) \mapsto (y, 3x)$
   (b) $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x, y) \mapsto (x^2, y^2)$
   (c) $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x, y, z) \mapsto (x - y + z, x - y + z)$
   (d) Az $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ minden $\underline{v}$ síkvektorhoz azt az x tengelyre eső vektort rendeli, melynek az első koordinátája a $\underline{v}$ két koordinátája közül a nagyobb (nemkisebb).
   (e) Az $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ minden síkvektorhoz az x tengelyre vett tükörképének origó körüli $+60°$-os elforgatottját rendeli.

7. Az $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezésről azt tudjuk, hogy az $(5, 3)$ vektor képe a $(2, 3)$ vektor, a $(4, 3)$ vektoré pedig a $(3, 2)$ vektor. Mi lesz a $(11, 6)$ vektor képe?

8. Az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ lineáris leképezés a $(2,6)$ vektorhoz a $(14,16,14)$ vektort, az $(1,-3)$ vektorhoz pedig az $(1,-10,-5)$ vektort rendeli.

   (a) Írjuk fel f mátrixát.

   (b) Mit rendel f a $(4,-1)$ vektorhoz?

9. Az $f:\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ lineáris leképezés és az $\mathbb{R}^3$-beli $B=\{\underline{b}_1=(1;0;0),\underline{b}_2=(2;1;0),\underline{b}_3=(2;2;1)\}$ bázisra teljesül, hogy $f(\underline{b}_1)=\underline{b}_2$, $f(\underline{b}_2)=\underline{b}_3$ és $f(\underline{b}_3)=\underline{b}_1$. Adjuk meg az f lineáris leképezés mátrixát a B bázisban.

10. Legyen $f:\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ lineáris leképezés és $B=\{\underline{b}_1,\underline{b}_2,\underline{b}_3\}$ bázis $\mathbb{R}^3$-ben. Tegyük fel, hogy f mátrixa a B bázis szerint az alábbi mátrix. Határozzuk meg a $\underline{b}_2$ vektort, ha tudjuk, hogy $f(\underline{b}_1+\underline{b}_3)=(10;20;30)$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & -4 \\ -6 & 5 & 8 \\ -7 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

11. Egy $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ lineáris leképezést tükrözésnek hívunk, ha minden $\underline{v}\in\mathbb{R}^n$ vektorra $f\big(f(\underline{v})\big)=\underline{v}$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy tükrözés mátrixának determinánsa nem lehet 0.