Mátrixok inverze, rangja

A számítástudomány alapjai

13. gyakorlat

2022.

Inverz mátrix.

Egy A $n \times n$-es mátrix inverzén azt az $n \times n$-es A^{-1} mátrixot értjük, melyre $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ teljesül.

Tétel.

Az $n \times n$-es A mátrixnak akkor és csak akkor létezik inverze, ha $\det A \neq 0$.

Definíció.

Legyen A tetszőleges mátrix. Azt mondjuk, hogy

(i) A oszloprangja r, ha A-nak van r darab lineárisan független oszlopa, de $r+1$ darab már nincs;

(ii) A sorrangja r, ha A-nak van r darab lineárisan független sora, de $r+1$ darab már nincs;

(iii) A determinánsrangja r, ha A-nak van $r \times r$-es nemnulla determinánsú részmátrixa, de $(r+1) \times (r+1)$-es már nincs.

Tétel, definíció.

Tetszőleges A mátrix oszlop-, sor- és determinánsrangja egyenlő. Ezt a közös értéket nevezzük az A mátrix rangjának.

Állítás.

(i) Ha $A, B \in \mathbb{R}^{n \times k}$, akkor $\mathrm{r}(A+B) \leq \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$.

(ii) Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ és $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$, akkor $\mathrm{r}(AB) \leq \min\big(\mathrm{r}(A), \mathrm{r}(B)\big)$.

1. Számoljuk ki a következő mátrixok inverzét, amennyiben azok léteznek.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & -7 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Határozzuk meg az alábbi A és B mátrixok hiányzó, betűkkel jelölt elemeit, ha tudjuk, hogy $B = A^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -1 & x & 1 \\ y & z & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & p \\ q & 5 & r \\ s & -26 & 27 \end{pmatrix}$$

3. Az A és B $n \times n$-es mátrixokról tudjuk, hogy $|A| \neq 0$, valamint hogy $AB = 0$. Határozzuk meg a B mátrixot.

4. Legyen A $m \times n$-es (vagyis m sorból és n oszlopból álló), B pedig $n \times m$-es (vagyis n sorból és m oszlopból álló) mátrix. Tegyük fel, hogy $n < m$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az AB mátrix nem invertálható.

5. Legyen $A \in \mathbb{R}^{33\times 44}$ olyan mátrix, amelyre $\left|AA^\top\right| = 42$. Határozzuk meg az $\left|A^\top A\right|$ determináns értékét.

6. Legyen A olyan $m\times n$-es mátrix, melyre $AA^\top$ és $A^\top A$ is reguláris. Bizonyítsuk be, hogy A is reguláris.

7. Az A és B $n \times n$-es mátrixokról tudjuk, hogy $|A| \neq 0$. Bizonyítsuk be, hogy egyértelműen léteznek olyan C és D $n \times n$-es mátrixok, amelyekre $CA = B = AD$ teljesül.

8. Számoljuk ki a következő mátrixok rangját.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

9. Számoljuk ki a következő mátrixok rangját az x, illetve a p és q valós paraméterek függvényében.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & 9 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & p \\ 3 & 4 & q & 2 \end{pmatrix}$$

10. A 6×6-os A mátrixra $\mathrm{r}(A) = 4$. Mutassuk meg, hogy léteznek olyan B és C mátrixok, amelyekre $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(C) = 2$ és $A = B + C$.

11. Legyen $A \in \mathbb{R}^{100\times 100}$ olyan mátrix, melyre $\mathrm{r}(A) = 24$. Bizonyítsuk be, hogy A-nak megváltoztatható úgy 18 eleme, hogy a kapott mátrix rangja 42 legyen.