Szélességi bejárás, Dijkstra algoritmusa

A számítástudomány alapjai

3. gyakorlat

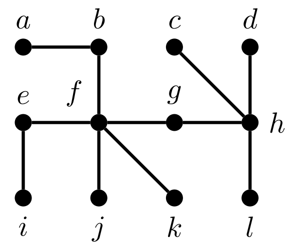
2022.

1. Adott a G irányítatlan gráf a következő éllistával.

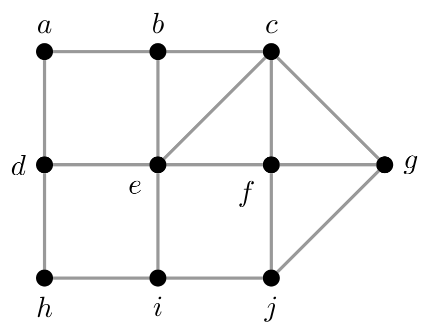
$\boldsymbol{a}$: b, c; $\boldsymbol{b}$: a, d; $\boldsymbol{c}$: a, d; $\boldsymbol{d}$: b, c, e, f;
$\boldsymbol{e}$: d, f, g; $\boldsymbol{f}$: d, e, g, h; $\boldsymbol{g}$: e, f, h; $\boldsymbol{h}$: f, g.

Keressünk G-ben a-ból kiinduló szélességi feszítőfát. Mennyi lesz a csúcsok a-tól való távolsága?

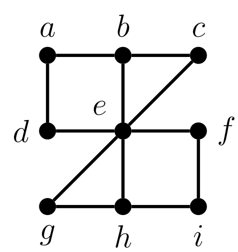
2. Az ábrán látható a G gráf egy szélességi fája. Honnan indulhatott a bejárás, ha tudjuk, hogy b és c szomszédosak G-ben?



3. Legfeljebb hány keresztél keletkezik az alábbi G gráf e gyökérből indított BFS bejárása után?



4. Indítsunk az ábrán látható G gráf d csúcsából szélességi bejárást és határozzuk meg a hozzá tartozó szélességi fát. Végrehajtható-e a fent említett BFS bejárás úgy, hogy bc egy faél legyen?



5. Törpfalván kitört a járvány: ronda kórság fertőzött meg néhány törpöt. Szerencsére a betegségből minden törp egy nap alatt meggyógyul, és ezután egy napig immunissá válik, ám sajnos ezt követően újra fertőződhet. Kellemetlen, hogy a törpök még betegen sem adják fel azt a megrögzött szokásukat, hogy minden egyes nap minden barátjukat meglátogatják. Márpedig ha beteg és nem immunis törp találkozik, az utóbbi bizonyosan megfertőződik. Mutassuk meg, hogy ha Törpfalván 100 törp él, akkor a járványnak a kitörését követő 101. napon már bizonyosan vége van.

6. Tegyük fel, hogy a G irányítatlan gráf tetszőleges szélességi kereséssel kapott feszítőfája csillag. Mit lehet mondani G-ről?

7. Adjunk hatékony algoritmust, amely egy n-csúcsú, összefüggő, irányítatlan gráfban meghatároz egy olyan gráfcsúcsot, amelyből minden más csúcs lefeljebb $(n/2)$-élű úton elérhető.

8. Egy irányított gráf csúcshalmaza $\{a, b, c, d, e, f\}$, az élek és súlyaik pedig az alábbiak: $s(a, b) = 5$, $s(a, e) = 6$, $s(b, c) = 4$, $s(b, d) = 6$, $s(c, a) = 3$, $s(c, d) = 1$, $s(d, e) = 2$, $s(e, c) = 2$, $s(e, f) = 1$, $s(f, b) = 3$, $s(f, c) = 1$, $s(f, d) = 1$. Dijkstra módszerével határozza meg a-ból az összes többi csúcsba vezető legrövidebb út hosszát.

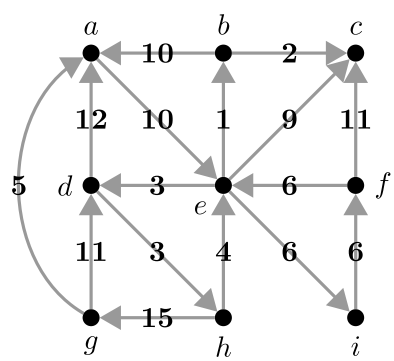
9. Adjuk meg az összes olyan minimális élszámú irányított gráfot (élsúlyokkal együtt), amelyekre az alábbi táblázat a Dijkstra-algoritmusban szereplő D tömb változásait mutathatja.

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
0	∞	∞	∞	∞	∞
0	2	6	∞	∞	7
0	2	5	9	∞	6
0	2	5	6	9	6
0	2	5	6	8	6
0	2	5	6	7	6

10. Az alábbi táblázat a Dijkstra-algoritmus lefutását mutatja egy G irányítatlan gráfon.
    (a) Határozzuk meg, hogy milyen sorrendben kerültek be az egyes csúcsok a KÉSZ halmazba.
    (b) Határozzuk meg az algoritmus után kapott legrövidebb utak fáját.
    (c) Határozzuk meg az ac él hosszát.

a	b	c	d	e
∞	∞	∞	0	∞
42	24	7	0	∞
33	16	7	0	77
24	16	7	0	18
22	16	7	0	18

11. Legyen G az alábbi ábrán látható irányított, élsúlyozott gráf. Van-e olyan, a c gyökérbe befelé irányított feszítőfája G-nek, amely minden x csúcsból tartalmazza G egy legrövidebb xc-útját? Ha van ilyen fa, akkor határozzunk is meg egyet.



12. Legyen adott a $G = (V, E)$ gráf élein egy $\ell : E \to \mathbb{R}$ hosszfüggvény. Igaz-e, hogy ha P a G egy legrövidebb uv-útja az ℓ hosszfüggvényre, akkor P egyúttal legrövidebb út az ℓ' hosszfüggvényre is, ahol
    (a) $\ell'(e) = \big(\ell(e)\big)^2$
    (b) $\ell'(e) = \ell(e) + 2$

    teljesül G minden e élére?

13. Adott egy $n \times k$ méretű táblázat, amiben minden mezőben egy 0 vagy egy 1 áll. Találjunk a táblázat bal felső sarkától a jobb alsó sarokig egy mezőhatárok mentén jobbra és lefelé haladó olyan vonalat, amire az igaz, hogy a vonal alatti 1-esek és a vonal feletti 0-k számának összege a lehető legkisebb. Hogyan érdemes eljárni?