

Legrövidebb utak keresése, mélységi bejárás, PERT

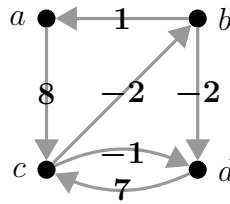
A SZÁMÍTÁSTUDOMÁNY ALAPJAI

4. gyakorlat

2022.

1. Határozzuk meg az alábbi gráfban

- Ford algoritmusával az A csúcból az összes többibe menő legrövidebb út hosszát!
- Floyd módszerével az összes pontpárra a legrövidebb út hosszát!



Változtassuk meg a dc él súlyát 7-ről 3-ra és futtassuk így is a fenti algoritmusokat.

- Legyen $G = (V, E)$ egy n -csúcú, m -élű, élsúlyozott, irányított gráf, és legyen $r \in V$ a G egy csúcsa. Tegyük fel, hogy G nem tartalmaz negatív összhosszúságú irányított kört, továbbá azt, hogy a G -beli egyszerű irányított utak legfeljebb 25 élből állnak. Javasoljunk m -mel (azaz a gráf élszámával) arányos költségű módszert az r csúcsból a gráf összes további csúcsába vivő legrövidebb utak hosszának meghatározására.
- Forintot szeretnénk különféle valutákra átváltani. Külföldön élő ismerőseink révén nem csak forintot, hanem számos más valutát is közvetlenül át tudunk váltani bizonyos valutákra. A cél, hogy esetleg ilyen átváltások felhasználásával minél jobb árfolyamot érjünk el a forintunk konverziója során. E célból elkészítettünk egy irányított gráfot, aminek a csúcsai az egyes valutáknak, az élek pedig az egyes közvetlen tranzakcióknak felelnek meg. Minden uv élhez ismert az adott váltásnál alkalmazott árfolyam, azaz, hogy hány egységet kell fizetnünk az u pénznemben a v pénznem egy egységéért. Adjunk hatékony módszert arra, hogy meghatározzuk, legfeljebb mennyit kaphatunk az egyes valutákból 1 Ft-ért, ill. határozzuk meg azt is, milyen átváltásokat kell ehhez végeznünk.
- Éllistájukkal adottak az alábbi G_1 és G_2 irányított gráfok.

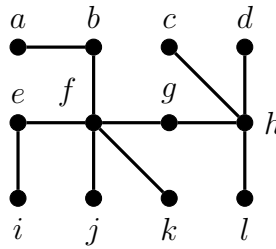
G_1 : \mathbf{a} : b, c, d ; \mathbf{b} : d ; \mathbf{c} : d ; \mathbf{d} : e ; \mathbf{e} : a ;
 G_2 : \mathbf{a} : f, g ; \mathbf{b} : a, g ; \mathbf{c} : -; \mathbf{d} : -; \mathbf{e} : c, d ; \mathbf{f} : e \mathbf{g} : e, f ;

- Keressünk a G_1 és G_2 gráfokban egy-egy mélységi feszítőerdőt.
 - Döntsük el mélységi bejárás segítségével, hogy ezek a gráfok aciklikusak-e.
 - Amelyik gráf aciklikus, abban adjunk meg egy topologikus sorrendet.
5. A 6-pontú irányított G gráf csúcsait jelölje x, y, z, u, v, w . A gráf egy mélységi bejárásánál a mélységi, illetve a befejezési számok a következők.

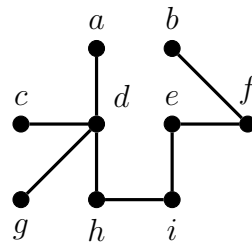
x : 1, 6; y : 2, 4; z : 6, 5; u : 3, 3; v : 4, 1; w : 5, 2

Adjuk meg a bejáráshoz tartozó mélységi feszítőfa éleit.

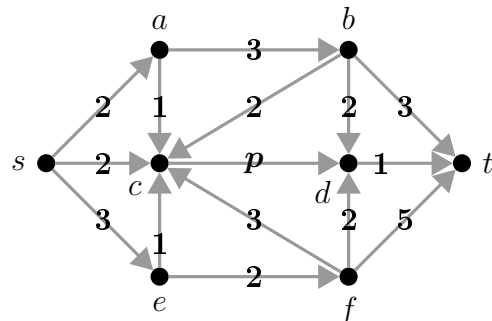
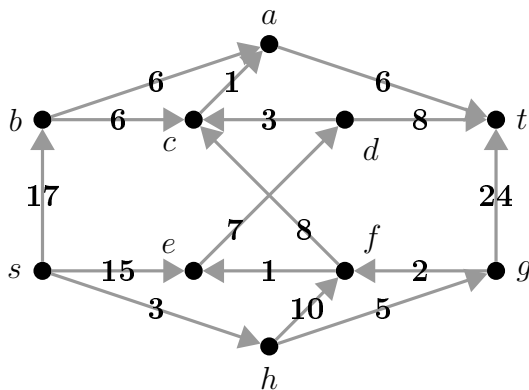
6. Bizonyítsuk be, hogy minden $G = (V, E)$ hurokélmentes, irányított gráf felbontható két aciklikus gráfra; pontosabban az élhalmazának van olyan E_1, E_2 partíciója ($E = E_1 \cup E_2$ és $E_1 \cap E_2 = \emptyset$), hogy a $G_1 = (V, E_1)$ és a $G_2 = (V, E_2)$ gráfok aciklikusak.
7. Az ábrán látható a G gráf egy mélységi fája. Honnan indulhatott a bejárás, ha tudjuk, hogy b és c , illetve a és e szomszédosak G -ben?



8. Tegyük fel, hogy az alábbi ábrán látható F fa a G gráfnak egyszerre a h -gyökerű BFS fája és a d -gyökerű DFS fája. Legfeljebb hány éle lehet G -nek?



9. Igaz-e, hogy minden aciklikus, irányított G gráf csúcsainak pontosan egy topologikus sorrendje van?
10. Igaz-e, hogy ha egy n csúcsú, aciklikus, irányított G gráfban van egy $n - 1$ élű irányított út, akkor G csúcsainak pontosan egy topologikus sorrendje van?
11. Legyen G egy irányított, aciklikus gráf, és tegyük fel, hogy az u és v csúcsai között egyik irányban sincs irányított út G -ben. Mutassuk meg, hogy G -nek van olyan topologikus sorrendje, amelyben u megelőzi v -t, és olyan is, amelyben v előzi meg u -t.
12. Határozzuk meg az ábrán látható PERT problémák legrövidebb végrehajtási idejét, és állapítsuk meg, mik a kritikus tevékenységek, valamint a b tevékenység legkésőbbi olyan kezdési időpontját, amely mellett a teljes PERT feladat a lehető legrövidebb idő alatt végrehajtható?



13. Adott egy PERT problémát leíró G irányított, aciklikus gráf egy $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ hosszfüggvénnyel, valamint a G egy $e = uv$ éle. Tudjuk, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ összeg kifizetésével a $c(e)$ hossz x -szel csökken. (A többi él hosszára nincs ráhatásunk.) Adjunk olyan eljárást, amelynek segítségével meghatározható az a legkisebb x érték, amelynek kifizetésével a PERT feladat a lehető legrövidebb idő alatt végrehajthatóvá válik.