Euler-körséták és Hamilton-körök

A számítástudomány alapjai

5. gyakorlat

2022.

Tétel.

(i) Egy irányítatlan G gráfban akkor és csak akkor van Euler-körséta, ha G izolált pontoktól eltekintve öszefüggő és minden csúcsának fokszáma páros.

(ii) Egy irányítatlan G gráfban akkor és csak akkor van Euler-séta, ha G izolált pontoktól eltekintve öszefüggő és a páratlan fokszámú csúcsok száma 0 vagy 2.

(iii) Egy irányított G gráfban akkor és csak akkor van Euler-körséta, ha G izolált pontoktól eltekintve gyengén öszefüggő és minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

Állítás.

Ha a G gráfban létezik k olyan csúcs, amelyeket elhagyva a gráf több, mint k komponensre esik szét, akkor nem létezik a gráfban Hamilton-kör.

Ha a G gráfban létezik k olyan csúcs, amelyeket elhagyva a gráf több, mint $k+1$ komponensre esik szét, akkor nem létezik a gráfban Hamilton-út.

Dirac-tétel.

Ha az n-csúcsú ($n \geq 3$) G gráfban minden pont foka legalább $n/2$, akkor a gráfban létezik Hamilton-kör.

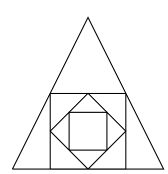
Ore-tétel.

Ha az n-csúcsú ($n \geq 3$) G gráfban minden u, v nemszomszédos csúcspárra teljesül, hogy $d(u) + d(v) \geq n$, akkor a gráfban létezik Hamilton-kör.

Hízlalási lemma.

Ha egy n-csúcsú G gráfban az u és v csúcsokra $d(u) + d(v) \geq n$ teljesül, akkor a G gráfnak pontosan akkor van Hamilton-köre, ha a $G + uv$ gráfnak van Hamilton-köre.

1. Ha lehet, rajzoljuk le az alábbi ábrát egy vonallal, a ceruza felemelése nélkül.

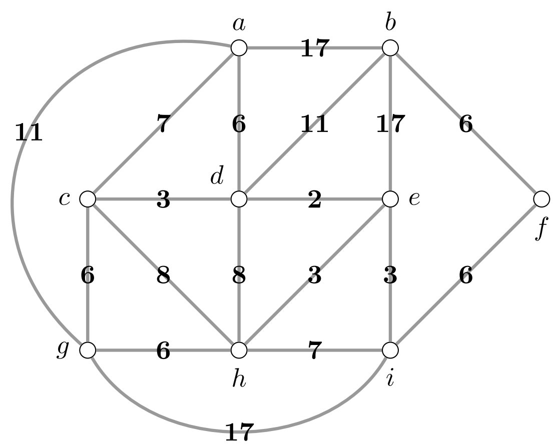


2. Egy G egyszerű gráf csúcsait az $1, 2, \ldots, 100$ számok jelölik. Az i és j csúcsok között pontosan akkor vezet él, ha $|i - j| \leq 2$. Van-e G-ben Euler-körséta, Euler-séta, Hamilton-kör, illetve Hamilton-út?
3. Egy gráf csúcsai egy 6-elemű halmaz 3-elemű részhalmazai; két különböző csúcsot akkor kötünk össze, ha a megfelelő halmazoknak legfeljebb 1 közös eleme van. Van-e Euler-körséta a gráfban?
4. Egy 8-csúcsú egyszerű gráfban nincs izolált pont és minden csúcs foka páros. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzávehető egy él úgy, hogy a gráf egyszerű maradjon és legyen Euler-sétája.
5. Az $r \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ értékek közül melyekre igaz, hogy minden 10-csúcsú, r-reguláris, egyszerű gráfban van Euler-körséta?
6. A G gráf tartalmaz olyan zárt élsorozatot, amely G minden élét páratlan sokszor tartalmazza. Igaz-e mindig, hogy ekkor G tartalmaz Euler-körsétát is?
7. Egy 59-csúcsú egyszerű gráfban bármely két csúcs fokszámösszege 60-nál nagyobb páros szám. Igaz-e, hogy a gráfban biztosan van Euler-körséta?
8. Bejárható-e a

(a) 4×4-es, (b) 3×5-ös, (c) 3×6-os

sakktábla egy huszárral úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk?

9. A G egyszerű gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok pontosan akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $|x - y| = 2$ vagy $|x - y| = 3$.
   (a) Van-e G-ben Hamilton-út?
   (b) Van-e G-ben Hamilton-kör?
10. Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű G gráfnak 20 csúcsa van és bármely fokszáma legalább 12, akkor G-nek van két olyan Hamilton-köre, melyeknek nincs közös éle.
11. A 101-csúcsú, egyszerű G gráf egyik csúcsának a fokszáma 50, az összes többi csúcsának a fokszáma pedig legalább 51. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van Hamilton-kör.
12. A G egyszerű gráfnak $2k + 1$ csúcsa van és minden csúcsának legalább k a foka. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van Hamilton-út.
13. A G gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_n$. A $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ csúcsokról tudjuk, hogy mindegyiknek a foka legalább $n/2$. (Sajnos a v_n csúcsról ezt nem tudjuk.) Bizonyítsuk be, hogy van egy út G-ben a $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ csúcsokon.
14. A G gráf egy 101-csúcsú „csillag" – vagyis az egyik csúcsa szomszédos az összes többivel, de a gráfnak ezen kívül több éle nincs. (Így tehát G-nek egy 100 fokú és száz 1 fokú csúcsa van.) Minimálisan hány élet kell hozzávenni G-hez, hogy a kapott gráfban legyen Hamilton-kör?
15. Egy 51-csúcsú összefüggő egyszerű gráfban egy csúcs foka 30, a többié 19.
   (a) Bizonyítsuk be, hogy a gráf komplementerében van Hamilton-kör.
   (b) Bizonyítsuk be, hogy az eredeti gráfhoz hozzá lehet venni 25 élet úgy, hogy a kapott gráf is egyszerű legyen, és legyen Euler-körsétája.
16. Az $n \geq 3$ csúcsú K_n teljes gráfból töröltük egy feszítőfájának éleit, majd a feszítőfa élei közül visszaraktunk kettőt. Mutassuk meg, hogy az így nyert G gráf tartalmaz Hamilton-kört.
17. Egy társaságban bármely két embernek legalább két közös ismerőse van, továbbá, ha bármely két ember nem ismeri egymást, akkor a társaság bármely harmadik tagját legalább az egyikük ismeri. Bizonyítsuk be, hogy le tudnak ülni egy (megfelelő méretű) kerek asztal köré vagy úgy, hogy mindenki két ismerőse között üljön.
18. Kritikus a helyzet: Abszurdisztán fővárosát, Mutyipusztát savköpő menyétek inváziója fenyegeti. Az alábbi ábrán látható a főváros térképe: az egyes utak mellett álló számok az adott útvonal hosszát jelölik. A veszélyt – mint mindig – most is az ügyeletes szuperhős, Órarugógerincű Felpattanó hárítja el. Mesteri tervének végrehajtása mellett (miszerint helikopterről lúgot permetezve semlegesíti a betolakodókat) még ebben a válságos pillanatban is a közvagyon megóvása a legfőbb célja. Ezért amellett, hogy minden utcát végigpermetez és visszatér a szabadon választott kiindulási pontra, szeretné egyúttal minimalizálni a lerepült össztávot is. Segítsünk Órarugógerincűnek abban, hogyan válasszon útvonalat.



19. A bölcsiben nyuszis-cicás dominókkal játszanak a gyerekek: a 24-darabos dominókészlet kövei 4-féle nyusziból és 6-féle cicából alkotható párok. Lehet-e az összes dominóból olyan kört alkotni, ahol az egymást követő köveken az egymás mellett álló képek megegyeznek?
20. Egy ajtót kell úgy kinyitnunk, hogy egy 10-gombos billentyűzeten egy általunk ismeretlen, titkos, 3-jegyű számkód jegyeit kell begépelnünk. Az előzőleg lenyomott számok a nyitást nem befolyásolják. Mennyi az a legkisebb összeg, amennyiért az ajtó bizonyosan kinyitható, bármi is legyen a titkos kód, ha minden egyes gombnyomás 1 petákba kerül?