

Síkbarajzolható gráfok

A SZÁMÍTÁSTUDOMÁNY ALAPJAI

6. gyakorlat

2022.

Euler-formula.

Ha egy k komponensű síkgráfnak n csúcsa, e éle és t tartománya van, akkor $n - e + t = k + 1$.

Speciálisan, ha egy összefüggő síkgráfnak n csúcsa, e éle és t tartománya van, akkor teljesül rá, hogy $n - e + t = 2$.

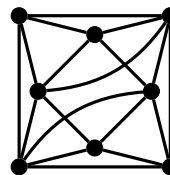
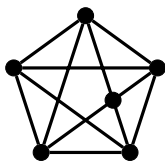
Állítás.

Ha a G egyszerű síkgráfnak legalább 3 csúcsa van, akkor az előbbi jelölésekkel $e \leq 3n - 6$; illetve ha ezen gráf nem tartalmaz háromszöget, akkor $e \leq 2n - 4$.

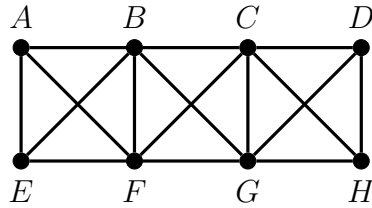
Kuratowski-tétel.

Egy gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz olyan részgráfot, amely topologikusan izomorf $K_{3,3}$ -mal vagy K_5 -tel.

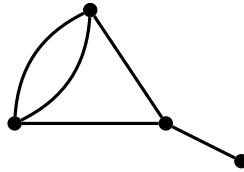
1. Hány csúcsa van annak az összefüggő síkgráfnak, amit (a külső tartományt is beleértve) három háromszög-, három négyszög- és egy ötszöglap határol?
2. Legfeljebb hány tartománya lehet egy 20-csúcsú, síkbarajzolt G gráfnak, ha G minden tartományát legalább 5 él határolja?
3. Síkbarajzolhatók-e a K_6 , $K_{4,2}$, $K_{4,3}$, $K_5 - e$, $K_{3,3} - e$, $\overline{C_7}$ gráfok, illetve az alábbi gráfok?



4. Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráf három olyan feszítőfát tartalmaz, amiknek nincs közös éle. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G tartalmaz topologikus K_5 -öt vagy topologikus $K_{3,3}$ -at.
5. Egy gráfban minden pont foka legfeljebb 3, és minden köre legfeljebb 5 hosszú. Mutassuk meg, hogy a gráf síkgráf.
6. Egy 20-csúcsú, 18-élű gráfnak két komponense van. Mutassuk meg, hogy a gráf síkbarajzolható.
7. Legyen G egyszerű, összefüggő, síkbarajzolható gráf. Mutassuk meg, hogy ha G -ből töröljük két éldiszjunkt feszítőfájának éleit, akkor a kapott gráf biztosan nem lesz összefüggő.
8. Maximálisan hány élet lehet hozzávenni az alábbi gráfhoz úgy, hogy egyszerű, síkbarajzolható gráfot kapjunk? (Egy él hozzávétele azt jelenti, hogy két meglévő csúcs közé húzunk be új élet, a gráfhoz további csúcsokat hozzávenni tehát nem szabad.)



9. Mutassuk meg, hogy ha $|V(G)| \geq 11$, akkor G és \overline{G} egyike biztosan nem síkgráf.
10. Bizonyítsuk be, hogy minden egyszerű síkgráfban
- a minimális fokszám legfeljebb 5;
 - ha a minimális fokszám 5, akkor legalább 12 ötödfokú csúcs van.
11. Készítsük el az alábbi gráf (ezen lerajzolásához tartozó) duálisát.



12. Van-e olyan egyszerű, összefüggő síkgráf, aminek feleannyi csúcsa van, mint a duálisának?
13. Mutassuk meg, hogy ha a K_8 gráfot lerajzoljuk a síkra úgy, hogy három él nem metszheti egymást közös pontban, akkor legalább 10 élkereszteződés keletkezik.
14. Mutassuk meg, hogy ha a $K_{5,5}$ gráfot lerajzoljuk a síkra úgy, hogy három él nem metszheti egymást közös pontban, akkor legalább 9 élkereszteződés keletkezik.
15. Legyen G egy $n \geq 3$ csúcsú, egyszerű, síkbarajzolható gráf. Mutassuk meg, hogy
- a G gráf egyúttal tóruszra is rajzolható;
 - a G gráfba tetszőleges új e élt behúzva a kapott $G + e$ gráf tóruszra rajzolható;
 - ha G -nek $(3n - 6)$ -nál kevesebb éle van, akkor behúzható G -be egy új él úgy, hogy továbbra is egyszerű, síkbarajzolható gráfot kapjunk;
 - a G gráfnak van legfeljebb harmadfokú csúcsa vagy G tetszőleges síkbarajzolásának van háromszöglapja.
16. Igazoljuk, hogy ha G olyan összefüggő, síkbarajzolt gráf, amelyben minden fokszám páros, akkor G tartományai kiszínezhetők sakktáblaszerűen két színnel úgy, hogy az élen szomszédos tartományok színe egymástól különböző legyen.