Altér, generátorrendszer, lineáris függetlenség

A számítástudomány alapjai

8. gyakorlat

2022.

Altér.

A $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ részhalmazt az $\mathbb{R}^n$ egy alterének nevezzük, ha V zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve.

Lineáris kombináció.

Legyen $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. A $\lambda_1\underline{v}_1 + \ldots + \lambda_k\underline{v}_k$ vektort a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ vektorok $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ skalárokkal vett lineáris kombinációjának nevezzük.

Generált altér.

Legyen $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$. A

$$\langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k \rangle := \left\{ \lambda_1\underline{v}_1 + \ldots + \lambda_k\underline{v}_k \;\middle|\; \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} \right\}$$

halmazt a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ vektorok által generált altérnek nevezzük.

Lineáris függetlenség.

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszerről azt mondjuk, hogy lineárisan független, ha

$$\lambda_1\underline{v}_1 + \ldots + \lambda_k\underline{v}_k = \underline{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0;$$

ellenkező esetben lineárisan összefüggő vektorrendszerről beszélünk.

Az újonnan érkező vektor lemmája.

Ha az $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_k$ rendszer lineárisan független, de az $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_k, \underline{f}_{k+1}$ rendszer lineárisan összefüggő, akkor $\underline{f}_{k+1} \in \langle \underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_k \rangle$ (vagyis $\underline{f}_{k+1}$ kifejezhető az $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_k$ lineáris kombinációjaként).

Kicserélési lemma.

Legyen $V \leq \mathbb{R}^n$ altér, $F \subseteq V$ lineárisan független rendszer, G pedig V egy generátorrendszere. Ekkor tetszőleges $\underline{f} \in F$ esetén létezik $\underline{g} \in G$, amelyre $F \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ is lineárisan független.

F-G egyenlőtlenség.

Legyen $V \leq \mathbb{R}^n$ altér, $\{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq V$ lineárisan független rendszer, $\{\underline{g}_1, \ldots, \underline{g}_m\}$ pedig V egy generátorrendszere. Ekkor $k \leq m$.

Állítás.

Legyen $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ egy mátrix és legyen M' egy olyan mátrix, amely M-ből elemi sorekvivalens átalakításokkal kapható, továbbá legyen S, illetve S' az M, illetve az M' sorvektorainak halamaza. Ekkor $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$.

Állítás.

Legyen $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$ egy mátrix és legyen M' egy olyan mátrix, amely M-ből elemi sorekvivalens átalakításokkal kapható, továbbá legyen $O = \{\underline{o}_1, \ldots, \underline{o}_k\}$, illetve $O' = \{\underline{o}'_1, \ldots, \underline{o}'_k\}$ az M, illetve az M' oszlopvektorainak halamaza. Ekkor O-n és O'-n ugyanazon lineáris összefüggések teljesülnek, azaz tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_k$ esetén $\sum_{i=1}^k \lambda_i\underline{o}_i = \sum_{i=1}^k \mu_i\underline{o}_i$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\sum_{i=1}^k \lambda_i\underline{o}'_i = \sum_{i=1}^k \mu_i\underline{o}'_i$.

1. Legyen

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Kifejezhető-e az $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorokból az $\underline{a}$ vektor?

   (b) Kifejezhető-e az $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorokból az $\underline{b}$ vektor?

   (c) Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek?

(i) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ (ii) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{a}$ (iii) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{b}$

(d) Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek által generált alteret.

(i) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ (ii) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{a}$ (iii) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{b}$

2. A p valós paraméter milyen értékeire lineárisan függetlenek-e az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli vektorok?

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ p \end{pmatrix}, \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ p \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad \underline{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}$$

3. Legyen $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan független vektorrendszer egy tetszőleges vektortérben. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $\underline{a}-\underline{b}$, $\underline{a}-\underline{c}$, $\underline{b}+\underline{c}$ vektorrendszer is lineárisan független.

4. Az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek. Következik-e ebből, hogy a $3\underline{a}-\underline{b}$, $2\underline{a}+\underline{c}$ és $4\underline{b}-3\underline{c}$ vektorok is mindig lineárisan függetlenek?

5. Döntsük el, hogy az $\mathbb{R}^4$ vektortérben alteret alkotnak-e az alábbi részhalmazok.

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| x_3 = 0 \right\}$ (b) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| x_2 = 1 \right\}$

6. Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^4$-ben azok a vektorok, melyek koordinátái (felülről lefelé)

(a) számtani sorozatot alkotnak; (b) mértani sorozatot alkotnak?

7. Nevezzünk egy $\mathbb{R}^5$-beli vektort Fibonacci-típusúnak, ha a (felülről számítva) harmadiktól kezdve mindegyik eleme a fölötte álló két elem összege. Így például az alábbi vektor Fibonacci-típusú. Igaz-e, hogy a Fibonacci-típusú vektorok alteret alkotnak $\mathbb{R}^5$-ben?

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

8. Tegyük fel, hogy az $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, …, $\underline{u}_m$ vektorok között pontosan egy olyan van, ami kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Mutassuk meg, hogy ekkor ez a vektor csakis a nullvektor lehet.

9. Az $\mathbb{R}^n$-beli $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ vektorokról tudjuk, hogy az összegük a nullvektor. Bizonyítsuk be, hogy

$$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{k-1} \rangle = \langle \underline{v}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_k \rangle.$$

10. Legyen

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 36 \end{pmatrix}, \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2p \\ 1+p \end{pmatrix}.$$

Hogyan válasszuk a valós p paramétert annak érdekében, hogy a $\underline{v}$ vektor előálljon $\underline{v} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c}$ alakban, és $|\alpha| + |\beta| + |\gamma|$ a lehető legkisebb legyen?

11. Legyen $G = \{\underline{g}_1, \ldots, \underline{g}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér egy generátorrendszere és tegyük fel, hogy a G vektorainak mindegyikéhez tartozik egy nemnegatív költség. Javasoljunk hatékony algoritmust, aminek a segítségével meghatározható a V altér egy olyan $G' \subseteq G$ generátorrendszere, amelyre a G'-beli vektorok összköltsége a lehető legkisebb.

12. Legyenek G_1 és G_2 a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér generátorrendszerei. Bizonyítsuk be, hogy bármely $\underline{g}_1 \in G_1$ vektorhoz létezik olyan $\underline{g}_2 \in G_2$ vektor, amelyre $G_1 \backslash \{\underline{g}_1\} \cup \{\underline{g}_2\}$, illetve $G_2 \backslash \{\underline{g}_2\} \cup \{\underline{g}_1\}$ egyaránt a V generátorrendszerei.