

Gráfelméleti alapfogalmak

A SZÁMÍTÁSTUDOMÁNY ALAPJAI

1. gyakorlat

2023.

Kézfogás-lemma.

Tetszőleges $G = (V, E)$ véges gráf esetén $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$, ahol $d(v)$ a v csúc fokszámát jelöli.

Izomorfia.

A $G = (V, E)$ és $G' = (V', E')$ gráfokat izomorfoknak nevezzük, ha mindkét gráf csúcsai megszámozhatók az $1, 2, \dots, n$ számokkal úgy, hogy tetszőleges $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén az i -vel és j -vel számozott csúcsok között pontosan ugyanannyi él fut G -ben és G' -ben.

Élhozzáadási lemma.

Legyen G egy tetszőleges gráf és G' egy olyan gráf, amelyet G -ből egy e él hozzávételével kapunk (azaz $G' = G + e$). Ekkor az alábbi két esetből pontosan az egyik valósul meg.

- (1) Az e élen keresztül nincsen kör a $G + e$ gráfban, valamint a $G + e$ gráfnak eggyel kevesebb komponense van, mint G -nek.
- (2) Az e élen keresztül van kör a $G + e$ gráfban, valamint a $G + e$ gráfnak ugyanannyi komponense van, mint G -nek.

1. Döntsük el, van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok foka rendre

- (a) 1, 2, 2, 3, 3, 3, (b) 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, (c) 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, (d) 1, 3, 3, 4, 5, 6, 6.

2. Igazoljuk, hogy ha egy 6-csúcsú G gráf fokszámai 2, 2, 2, 4, 5, 5, akkor G nem egyszerű.

3. Rajzoljuk le az összes olyan, páronként nem izomorf, egyszerű gráfot, melyre

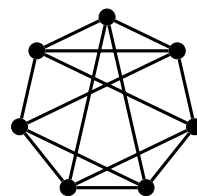
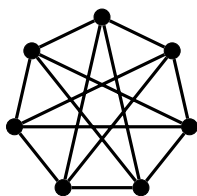
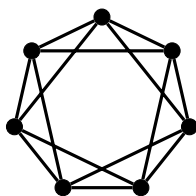
- (a) $n = 4, m = 5$; (b) $n = 5, m = 3$; (c) $n = 5, m = 7$; (d) $n = 5, m = 8$;

ahol n , illetve m jelöli a gráf csúcsainak, illetve éleinek a számát.

4. Mi lehet a G gráf, ha $\Delta(G) \leq 2$? ($\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszámát jelöli.)

5. Mutassunk a komplementerével izomorf 5-, illetve 6-pontú gráfot.

6. Melyek izomorfak az alábbi gráfok közül?



7. A G egyszerű gráf csúcshalmaza $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$, melyben az 1-es csúc szomszédos a 8-assal, ezen kívül pedig az $x, y \in V(G), x \neq y$ csúcsok pontosan akkor szomszédosak G -ben, ha $|x - y| \leq 2$. Izomorf-e a G gráf a saját komplementerével?

8. A G irányítatlan gráfnak nyolc csúcsa van, a, b, c, d, e, f, g, h , melyek fokszámai rendre 6, 4, 4, 2, 2, 2, 1, 1. A G éleinek egy alkalmas irányításával létrejövő G' irányított gráfban a fenti csúcsokból rendre $x, 3, 1, 1, 2, 1, 0, 0$ él lép ki. Határozzuk meg x értékét.
9. A 6-csúcsú G egyszerű gráfból irányított gráfot készítettünk úgy, hogy G minden élét véletlenszerűen az egyik vagy a másik irányba irányítottuk. Végül azt vettük észre, hogy a kapott irányított gráfban bármely két csúcs kifoka (vagyis a csúcsból kilépő élek száma) különböző. Rajzoljuk le a kapott irányított gráfot.
10. Igazoljuk, hogy tetszőleges egyszerű gráf élei irányíthatók úgy, hogy ne keletkezzen irányított kör.
11. Egy 20-csúcsú, egyszerű gráfban nincs izolált csúcs, az egyfokú csúcsok száma pedig pontosan 3. Mutassuk meg, hogy a gráfnak legalább 19 éle van.
12. Van olyan G gráf, melyben minden csúcs foka különböző? És ha a gráf egyszerű?
13. A 6-csúcsú G gráf hurokért nem, de többszörös éleket tartalmazhat. Tudjuk, hogy G bármely két csúcsának a foka különböző. Minimálisan hány éle van G -nek?
14. A 100-csúcsú G irányított gráfban minden csúcs kifoka legalább annyi, mint a befoka (ahol egy csúcs kifoka, illetve befoka alatt az abból kilépő, illetve az abba belépő élek számát értjük). A G gráf egyik csúcsának a kifoka 18. Mennyi lehet ugyanennek a csúcsnak a befoka?
15. Egy n -csúcsú, egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább $n/2$. Következik-e ebből, hogy a gráf összefüggő?
16. A G gráfról tudjuk, hogy egyszerű, 10 csúcsa van, és ebből 9 csúcs fokszáma pontosan 5. Igazoljuk, hogy G összefüggő.
17. Egy 100-csúcsú, egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább 33. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzá lehet venni egyetlen új élet úgy, hogy a kapott gráf összefüggő legyen.
18. Egy 23-csúcsú, egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább 7. Mutassuk meg, hogy bárhogy választunk ki a gráf csúcsai közül hármat, lesz köztük két olyan, melyek között van a gráfban út.
19. Igazoljuk, hogy ha v egy véges G gráf páratlan fokú csúcsa, akkor G -ben van olyan út, amely v -t a G egy másik páratlan fokú csúcsával köti össze.