Bázis, dimenzió, determináns

A számítástudomány alapjai

10. gyakorlat

2023.

Bázis.

A $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ vektorrendszert a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisának nevezzük, ha lineárisan független és egyúttal V generátorrendszere.

Tétel.

Ha egy $V \leq \mathbb{R}^n$ altérnek van k-elemű bázisa, akkor minden bázisa k-elemű.

Dimenzió.

A $V \leq \mathbb{R}^n$ vektortér dimenziója k, ha V-nek van k-elemű bázisa (ekkor V összes bázisa k-elemű).

Koordinátavektor.

Legyen $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_k\}$ a $V \leq \mathbb{R}^n$ altér egy bázisa és $\underline{v} \in V$ egy tetszőleges vektor. Azt mondjuk, hogy a $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$ vektor a $\underline{v}$ vektor B szerinti koordinátavektora, ha $\underline{v} = \lambda_1 \underline{b}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{b}_k$. Jelölése:

$$[\underline{v}]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Permutáció.

A $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ n-tagú számsorozatot permutációnak nevezzük, ha az $1, \ldots, n$ számok mindegyikét pontosan egyszer tartalmazza. Az n-edfokú permutációk halmazát S_n jelöli.

Inverzió.

A $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ permutációban a π_i és a π_j tagok inverzióban állnak, ha $i < j$, de $\pi_i > \pi_j$. A π permutáció inverziószáma az összes inverzióban álló számpárok száma. Ennek jele $I(\pi)$.

Determináns.

Az $n \times n$-es A mátrix determinánsának a $\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{I(\pi)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)}$ értéket nevezzük.

1. Legyen

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Igaz-e, hogy $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{a}$ bázis $\mathbb{R}^4$-ben? Ha igen, határozzuk meg $\underline{b}$ koordinátavektorát eszerint a bázis szerint.

(b) Igaz-e, hogy $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{b}$ bázis $\mathbb{R}^4$-ben? Ha igen, határozzuk meg $\underline{a}$ koordinátavektorát eszerint a bázis szerint.

(c) Határozzuk meg az $\langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{a} \rangle$ altér dimenzióját.

(d) Határozzuk meg az $\langle \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{b} \rangle$ altér dimenzióját.

2. Legyen $b_1 = (1, 3, -2)^\top$, $b_2 = (2, 1, 1)^\top$ mellett $B = \{b_1, b_2\}$ a $V \leq \mathbb{R}^3$ altér bázisa. Határozzuk meg a $v = (1, -7, 8)^\top \in V$ vektor B bázis szerinti $[v]_B$ koordinátavektorát.

3. Álljon a $V \leq \mathbb{R}^4$ altér azokból az $\underline{x} \in \mathbb{R}^4$ oszlopvektorokból, amelyekre fennállnak az $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ és a $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0$ egyenletek. Határozzuk meg a V altér dimenzióját. (A feladat teljes értékű megoldásához nem szükséges megmutatni, hogy V valóban altér.)

4. Határozzuk meg a IX/9. feladatban definiált $\mathbb{R}^5$-beli altérnek (vagyis a Fibonacci-típusú vektorok alterének) a dimenzióját, valamint adjuk meg ennek az altérnek egy olyan bázisát, amely tartalmazza az említett feladatban a példaként megadott vektort.

5. Legyen

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 36 \\ p \end{pmatrix}.$$

A p paraméter milyen értékére igaz a $\underline{v} \in \langle \underline{b}_1, \underline{b}_2 \rangle$ állítás? A p ezen értékére határozzuk meg a $[\underline{v}]_B$ koordinátavektort, ahol $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$.

6. Tudjuk, hogy az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^4$-ben. Határozzuk meg az $\underline{a}+\underline{b}, \underline{c}+\underline{d}, \underline{a}+\underline{c}, \underline{b}+\underline{d}$ vektorok által generált altér dimenzióját.

7. Tudjuk, hogy az $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \underline{w}$ vektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^4$-ben. Határozzuk meg az $\underline{x}-\underline{y}, \underline{z}-\underline{w}, \underline{x}+\underline{y}+\underline{z}+\underline{w}$ vektorok által generált altér dimenzióját.

8. Megadható-e $\mathbb{R}^4$-ben

(a) 4 darab vektor úgy, hogy közülük bármely 2 lineárisan független legyen, de semelyik 3 ne legyen lineárisan független?

(b) 6 darab vektor úgy, hogy közülük bármely 5 generátorrendszert alkosson, de semelyik 4 se alkosson generátorrendszert $\mathbb{R}^4$-ben?

9. Határozzuk meg az alábbi permutációk inverziószámát.

(a) $(1, 3, 5, 7, 9, 8, 6, 4, 2)$

(b) $(n, n-1, \ldots, 2, 1)$

(c) $(21, 22, \ldots, 30, 11, 12, \ldots 20, 1, 2, \ldots, 10)$

10. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét a determináns definíciója szerint.

(a)

$$\begin{vmatrix} -5 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ -4 & 9 & 0 & 7 & 3 \\ 6 & 5 & -2 & -6 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 5 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 9 & 0 & 8 & 6 \end{vmatrix}$$