Determináns, műveletek mátrixokkal

A számítástudomány alapjai

11. gyakorlat

2023.

Tétel.

Legyen A egy $n \times n$-es mátrix. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

(i) Ha A felső/alsó háromszögmátrix, akkor $\det(A)$ a főátlóbeli elemek szorzata.

(ii) Ha A egy sora/oszlopa csupa nulla, akkor $\det(A) = 0$.

(iii) Ha A egy sorát/oszlopát λ-val végigszorozzuk, akkor a determináns is λ-val szorzódik.

(iv) Ha A két sorát/oszlopát felcseréljük, akkor a determináns előjelet vált.

(v) Ha A két sora/oszlopa megegyezik, akkor $\det(A) = 0$.

(vi) Ha A egy sorának/oszlopának λ-szorosát hozzáadjuk egy másik sorhoz/oszlophoz, akkor a determináns nem változik.

Előjeles aldetermináns.

Az $n \times n$-es A mátrix a_{ij} eleméhez tartozó A_{ij} előjeles aldeterminánst úgy kapjuk, hogy az A mátrixból elhagyjuk az i-edik sorát és a j-edik oszlopát, majd a kapott $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix determinánsát megszorozzuk $(-1)^{i+j}$-nel.

Kifejtési tétel.

Ha az $n \times n$-es A mátrix valamelyik sorának, vagy oszlopának minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldetermináns értékével és a kapott n darab kéttényezős szorzatot összeadjuk, akkor A determinánsának értékét kapjuk.

Determinánsok szorzástétele.

Ha A, B $n \times n$-es valós mátrixok, akkor $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

1. Számoljuk ki az alábbi determinánsok értékét.

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \\ -3 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 9 & -8 \\ -4 & 4 & 1 & -8 & 3 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & 4 & 11 & -7 \\ -3 & 9 & -5 & -9 & 5 \\ 4 & -12 & 8 & 13 & -2 \\ 5 & -11 & 10 & -1 & -12 \end{vmatrix}$$

(c)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 8 \\ 7 & 2 & 9 & 8 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

(d)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}$$

2. Számoljuk ki az alábbi determinánsok értékét a kifejtési tétel felhasználásával.

(a)
$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

(b)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

3. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat a p valós paraméter minden értékére.

(a)
$$\begin{vmatrix} p & 0 & 5 & p \\ 6 & p & 4 & 0 \\ 7 & 2 & p & 0 \\ 6 & p & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

(b)
$$\begin{vmatrix} p & 2p & p & 3p \\ 3 & 9 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 7 & 1 \\ 3 & 7 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

4. A p paraméter milyen értékére lesz az alábbi determináns 42?
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & p & p \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 3 & 3 \\ p & 0 & 2 & p \end{vmatrix}$$

5. Az $A \in \mathbb{R}^{42\times 42}$ mátrixnak minden olyan eleme 42, ami közvetlenül a főátló alatt vagy felett áll, A minden más eleme 0. Határozzuk meg A determinánsát.

6. Legyen A egy nem 0 determinánsú, 9×9-es mátrix, A' pedig az a mátrix, amit A-ból az első sor λ-val való szorzásával kapunk. Mennyi lehet λ értéke, ha tudjuk, hogy $\det(A') = \det(\lambda A)$?

7. Egy 4×4-es A mátrixban az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem $a_{ij} = i^2 j^2 + 1$. Határozzuk meg A determinánsát.

8. Bizonyítsuk be, hogy
$$\begin{vmatrix} 1849 & 1444 & 1896 & 1222 \\ 1490 & 1703 & 1790 & 1526 \\ 1342 & 1566 & 1541 & 1514 \\ 1242 & 1552 & 1382 & 1825 \end{vmatrix} \neq 0.$$

9. Határozzuk meg az $(1, 2, 1)$ és a $(5, 2, 4)$ vektorok skaláris szorzatát.

10. Legyen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$
Adjuk meg az AB, BA, $A \cdot A^\top$, $AB + 2C$ mátrixokat.

11. (a) Számítsuk ki az A^{2015} mátrixot az alábbi A mátrixra.
(b) Számítsuk ki $\det\left(B^{2015}\right)$ értékét az alábbi B mátrixra.
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

12. Léteznek-e olyan 2×2-es A és B mátrixok, melyekre $A^2 = B^2$, de $A \neq B$ és $A \neq (-1) \cdot B$?

13. Az A mátrix minden eleme 0, 1 vagy -1, és a 0-tól különböző elemeinek száma 2012. Határozzuk meg az $A \cdot A^\top$ mátrix főátlójában álló elemeknek az összegét.