Lineáris leképezések

A számítástudomány alapjai

12. gyakorlat

2023.

Lineáris leképezés.

Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ függvényt lineáris leképezésnek nevezzük, ha tetszőleges $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(i) $f(\underline{x}+\underline{y}) = f(\underline{x}) + f(\underline{y})$,

(ii) $f(\lambda \cdot \underline{x}) = \lambda \cdot f(\underline{x})$.

Tétel. Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ függvény akkor és csak akkor lineáris leképezés, ha létezik olyan $(k \times n)$-es A mátrix, melyre minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén $f(\underline{x}) = A\underline{x}$ teljesül.

Ekkor f mátrixa egyértelmű: tetszőleges $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén az i-edik oszlopa $f(\underline{e}_i)$.

1. Lineáris leképezések-e az alábbi $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ függvények? Ha igen, akkor írjuk fel a leképezés $[f]$ mátrixát.
   (a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x, y)^\top \mapsto (y, 3x)^\top$
   (b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x, y)^\top \mapsto (x^2, y^2)^\top$
   (c) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x, y, z)^\top \mapsto (x - y + z, x - y + z)^\top$
   (d) Az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ minden $\underline{v}$ síkvektorhoz azt az x tengelyre eső vektort rendeli, melynek az első koordinátája a $\underline{v}$ két koordinátája közül a nagyobb (nemkisebb).
   (e) Az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ minden síkvektorhoz az x tengelyre vett tükörképének origó körüli $+60°$-os elforgatottját rendeli.
2. Az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezésről azt tudjuk, hogy az $(5;3)^\top$ vektor képe a $(2;3)^\top$ vektor, a $(4;3)^\top$ vektoré pedig a $(3;2)^\top$ vektor. Mi lesz a $(11;6)^\top$ vektor képe?
3. Az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés a $(2;6)^\top$ vektorhoz a $(14;16;14)^\top$ vektort, az $(1;-3)^\top$ vektorhoz pedig az $(1;-10;-5)^\top$ vektort rendeli.
   (a) Írjuk fel f mátrixát.
   (b) Mit rendel f a $(4;-1)^\top$ vektorhoz?
4. Tetszőleges $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^\top$ vektorra legyen $f(u) = (u_2, u_3, u_4, u_1)^\top$, valamint legyen $F(u) = 42f(u) - f\big(f(u)\big)$. Lineáris leképezés-e az $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ függvény? Ha igen, akkor adjuk meg a leképezés $[F]$ mátrixát.
5. Legyen etszőleges $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^\top \in \mathbb{R}^4$ esetén $f(u) = (u_2, u_3, u_4, u_1)^\top$ és $g(u) = (u_2, u_1, u_4, u_3)^\top$. Lineáris leképezés-e az $F = g\big(f(u)\big)$ függvény? Ha igen, akkor adjuk meg a leképezés $[F]$ mátrixát.