Összefüggőség, fák

A SZÁMÍTÁSTUDOMÁNY ALAPJAI

2. gyakorlat

2023.

Erdő.

Egy körmentes gráfot erdőnek nevezünk.

Fa.

Egy összefüggő, körmentes gráfot fának nevezünk.

Állítás.

Egy n-csúcsú, k-komponensű erdőnek $n-k$ éle van.

Speciálisan, egy n-csúcsú fának $n-1$ éle van.

Állítás.

Egy gráf akkor és csak akkor összefüggő, ha létezik feszítőfája.

1. A 100-csúcsú, 80-élű G gráf nem tartalmaz kört. Hány komponense lehet G-nek?
2. Hány pontja van annak a T fának, melyre $\left|E(\overline{T})\right| = 15 \cdot \left|E(T)\right|$?
3. Határozzuk meg az összes olyan (legalább kétcsúcsú) fát, amely izomorf a saját komplementerével. (Az egymással izomorf megoldásokat tekintsük azonosnak.)
4. Egy fában csak két különböző fokszám fordul elő: az egyik fajta 9-szer, a másik 92-szer. Mi a szóban forgó két fokszám?
5. Tegyük fel, hogy az F fának pontosan 333 levele van. Igazoljuk, hogy F-nek van olyan levéltől különböző v csúcsa, amelynek a fokszámára $d(v) \neq 5$ teljesül.
6. Tegyük fel, hogy az F fának csak első- és negyedfokú csúcsai vannak, szám szerint n_1, illetve n_4. Igazoljuk, hogy $n_1 = 2 \cdot n_4 + 2$.
7. Egy 10-csúcsú fában van két 5-ödfokú csúcs. Igazoljuk, hogy ez a két csúcs szomszédos.
8. A G egyszerű gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Az $x, y \in V(G)$, $x \neq y$ csúcsok pontosan akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $|x-y| \leq 2$. Van-e G-nek olyan feszítőfája, amely
   (a) tartalmazza G-nek az összes olyan $\{x, y\}$ élét, amelyre $x, y \leq 3$ teljesül;
   (b) tartalmazza G-nek az összes olyan $\{x, y\}$ élét, amelyre $|x-y| = 2$ teljesül?
9. Bizonyítsuk be, hogy ha egy fába behúzunk egy élt, akkor pontosan egy kör keletkezik.
10. Egy 100-csúcsú, összefüggő, egyszerű gráfnak 100 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor van a gráfban 3 páronként különböző feszítőfa. (Két feszítőfa akkor különböző, ha nem pontosan ugyanazon élek alkotják.)
11. Lehet-e néhány lépésben egy 88-csúcsú, 111-élű, 42-komponensű gráfból összefüggő gráfot képezni, ha minden lépésben két élt törlünk és egy élt húzunk be? (Korábban törölt él is behúzható.)

12. Lehet-e néhány lépésben egy 77-csúcsú, 66-élű, 42-komponensű, egyszerű gráfból körmentes, egyszerű gráfot képezni, ha minden lépésben egy élt törlünk és két élt húzunk be? (Korábban törölt él is behúzható.)

13. Igazoljuk, hogy minden fa megkapható egy csúcsból kiindulva úgy, hogy minden lépésben egy új levelet adunk az addig felépített gráfhoz.

14. Igazoljuk, hogy minden összefüggő gráfnak van olyan csúcsa, amelyet elhagyva a gráf összefüggő marad.

15. A 10-csúcsú, egyszerű G gráfban bárhogyan is soroljuk fel a $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ csupa különböző csúcsokat, ahol $3 \le k \le 10$, a $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}$, …, $\{v_{k-1}, v_k\}$ és $\{v_k, v_1\}$ párok közül legalább az egyik benne van G élhalmazában. Mutassuk meg, hogy ekkor G-nek legalább 36 éle van.

16. Mutassuk meg, hogy ha T_1 és T_2 két fa ugyanazon a véges ponthalmazon és e_1 a T_1 tetszőleges éle, akkor létezik T_2-nek egy olyan e_2 éle, hogy $T_1 - e_1 + e_2$ és $T_2 - e_2 + e_1$ is fa.