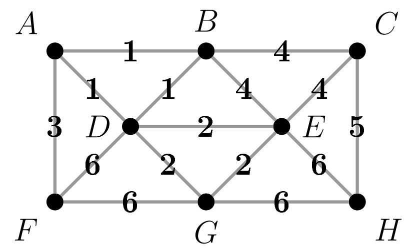
Minimális költségű feszítőfák

A számítástudomány alapjai

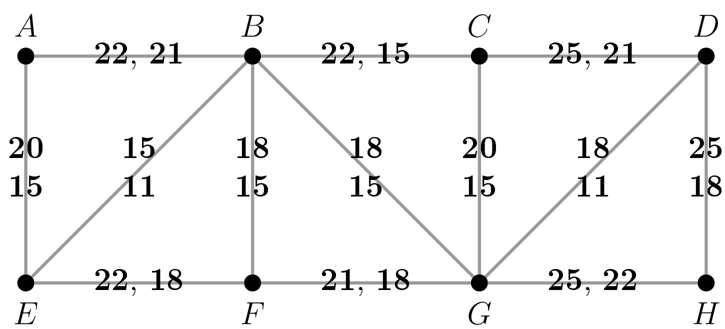
3. gyakorlat

2023.

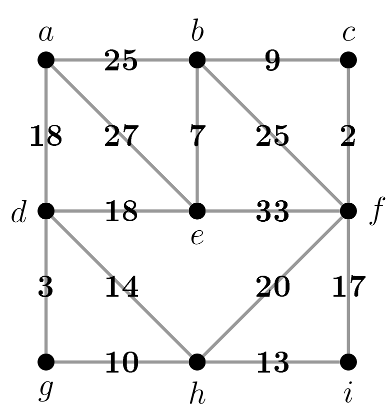
1. (a) Határozzuk meg az alábbi gráf egy minimális összsúlyú feszítőfáját.
   (b) Hány különböző kimenete lehet a Kruskal-algoritmusnak?



2. Az alábbi ábrán látható G gráf élei a felújítandó útszakaszokat jelentik. Minden élen két költség van: az olcsóbbik az egyszerű felújítás költsége, a drágább pedig ugyanez, kerékpárút építéssel. A cél az összes útszakasz felújítása úgy, hogy összefüggő kerékpárúthálózat épüljön ki, amelyen G minden pontja elérhető. Határozzunk meg egy lehető legolcsóbb felújítási tervet, ami teljesíti ezt a feltételt.



3. Az alábbi ábrán látható a G irányítatlan gráf és az élek költségei. Határozzuk meg, hogy ha az e és a h csúcsok közé behúzunk egy új élet, akkor ezen élnek milyen (nemnegatív) költséget adhatunk ahhoz, hogy biztosan benne legyen a kapott gráfnak legalább egy minimális összsúlyú feszítőfájában.



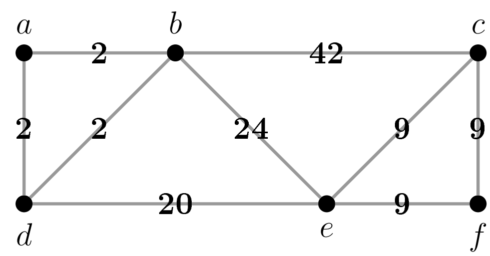
4. Abszurdisztán kormánya tendert ír ki n településnek a helyi vízműre történő rácsatlakoztatására. Minden ajánlat két település (vagy egy település és a vízmű) között kiépítendő vezeték költségét tartalmazza. Tudjuk, hogy a kormány úgy választja ki a megépítendő vezetékeket és az azokat építő egyes vállalkozásokat, hogy a lehető legolcsóbban csatlakozzon az n település a vízműhöz. Cégünk különféle homályos üzletek nyélbeütésével igen olcsón meg tudná építeni a Rátótot és Piripócsot összekötő vezetéket, ráadásul minisztériumi kapcsolatunk, Mutyi bácsi elárulta nekünk az összes beérkezett ajánlatot. Hogyan árazzuk a saját Rátót–Piripócs ajánlatunkat, hogy a lehető legnagyobbat szakítsuk?

5. Adott egy $G = (V, E)$ gráf és az élein egy $k\colon E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Tegyük fel, hogy ismerünk a $G - e$ gráfon egy minimális költségű F feszítőfát. Határozzuk meg a G gráfnak egy olyan minimális költségű feszítőfáját, amelynek F-fel a lehető legtöbb közös éle van.

6. Legfeljebb mennyivel

   (a) csökkenhet, illetve (b) nőhet

   a minimális költségű feszítőfa költsége, ha az alábbi ábrán látható gráf egyetlen élét törölhetjük, és ugyanilyen költséggel két tetszőleges csúcs között felvehetünk egy új élt?



7. Bizonyítsuk be, hogy ha a $G = (V, E)$ összefüggő gráf minden élének különböző a költsége, akkor G minimális költségű feszítőfája egyértelmű.

8. Legyen G egy összefüggő gráf és $k: E(G) \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény G élein. Mutassuk meg, hogy G minden minimális összsúlyú feszítőfája megkapható a Kruskal-algoritmus egy lehetséges futásának eredményeként.

9. Adott egy $G = (V, E)$ gráf és egy $k: E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény, valamint G éleinek egy piros, fehér és zöld színnel színezése. Adjunk hatékony eljárást a G olyan minimális költségű feszítőerdejének megtalálására, amely a lehető legtöbb zöld, és a lehető legkevesebb piros élt tartalmazza.