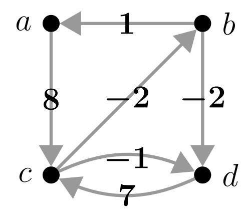
Legrövidebb utak keresése, mélységi bejárás, PERT

A számítástudomány alapjai

5. gyakorlat

2023.

1. Határozzuk meg az alábbi gráfban
   (a) Ford algoritmusával az a csúcsból az összes többibe menő legrövidebb út hosszát;
   (b) Floyd módszerével az összes pontpárra a legrövidebb út hosszát.



   Változtassuk meg a dc él súlyát 7-ről 3-ra és futtassuk így is a fenti algoritmusokat.

2. Legyen $G = (V, E)$ egy n-csúcsú, m-élű, élsúlyozott, irányított gráf, és legyen $r \in V$ a G egy csúcsa. Tegyük fel, hogy G nem tartalmaz negatív összhosszúságú irányított kört, továbbá azt, hogy a G-beli egyszerű irányított utak legfeljebb 25 élből állnak. Javasoljunk m-mel (azaz a gráf élszámával) arányos költségű módszert az r csúcsból a gráf összes további csúcsába vivő legrövidebb utak hosszának meghatározására.

3. Éllistájukkal adottak az alábbi G_1 és G_2 irányított gráfok.

G_1:	$\boldsymbol{a}$: b, c, d	$\boldsymbol{b}$: d	$\boldsymbol{c}$: d	$\boldsymbol{d}$: e	$\boldsymbol{e}$: a		
G_2:	$\boldsymbol{a}$: f, g	$\boldsymbol{b}$: a, g	$\boldsymbol{c}$: -	$\boldsymbol{d}$: -	$\boldsymbol{e}$: c, d	$\boldsymbol{f}$: e	$\boldsymbol{g}$: e, f

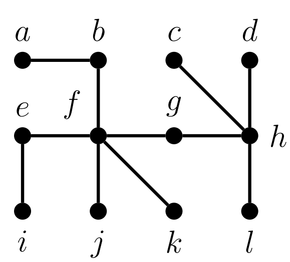
   (a) Keressünk a G_1 és G_2 gráfokban egy-egy mélységi feszítőerdőt.
   (b) Döntsük el mélységi bejárás segítségével, hogy ezek a gráfok aciklikusak-e.
   (c) Amelyik gráf aciklikus, abban adjunk meg egy topologikus sorrendet.

4. A 6-pontú, irányított G gráf csúcsait jelölje x, y, z, u, v, w. A gráf egy mélységi bejárásánál a mélységi, illetve a befejezési számok a következők.

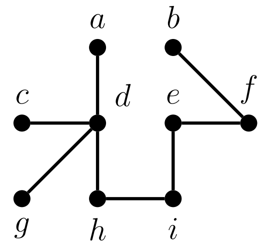
$$x\colon 1,6; \quad y\colon 2,4; \quad z\colon 6,5; \quad u\colon 3,3; \quad v\colon 4,1; \quad w\colon 5,2$$

   Adjuk meg a bejáráshoz tartozó mélységi feszítőfa éleit.

5. Az ábrán látható a G gráf egy mélységi fája. Honnan indulhatott a bejárás, ha tudjuk, hogy b és c, illetve a és e szomszédosak G-ben?



6. Tegyük fel, hogy az alábbi ábrán látható F fa a G gráfnak egyszerre a h-gyökerű BFS fája és a d-gyökerű DFS fája. Legfeljebb hány éle lehet G-nek?



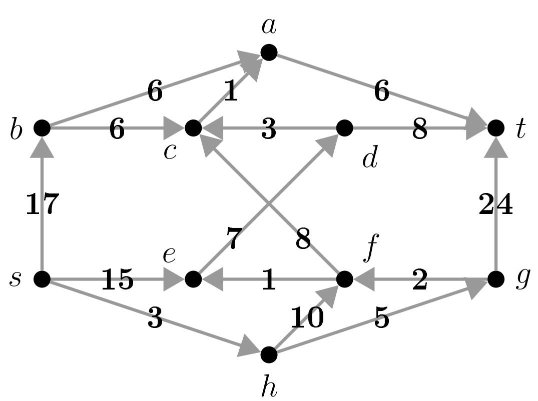
7. Igaz-e, hogy minden aciklikus, irányított G gráf csúcsainak pontosan egy topologikus sorrendje van?

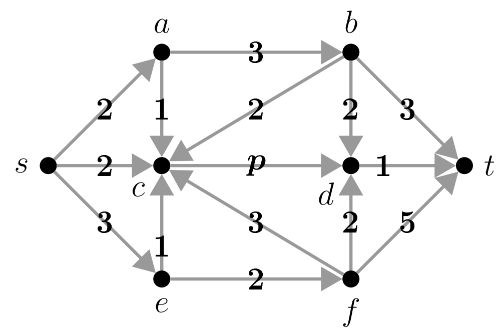
8. Legfeljebb hány éle lehet az egyszerű, irányított G gráfnak, ha G-nek a, b, c, d, e és d, b, c, a, e is topologikus sorrendje?

9. Igaz-e, hogy ha egy n-csúcsú, aciklikus, irányított G gráfban van egy $(n-1)$-élű irányított út, akkor G csúcsainak pontosan egy topologikus sorrendje van?

10. Legyen G egy irányított, aciklikus gráf, és tegyük fel, hogy az u és v csúcsai között egyik irányban sincs irányított út G-ben. Mutassuk meg, hogy G-nek van olyan topologikus sorrendje, amelyben u megelőzi v-t, és olyan is, amelyben v előzi meg u-t.

11. Határozzuk meg az ábrán látható PERT problémák legrövidebb végrehajtási idejét, és állapítsuk meg, mik a kritikus tevékenységek, valamint a b tevékenység legkésőbbi olyan kezdési időpontját, amely mellett a teljes PERT feladat a lehető legrövidebb idő alatt végrehajtható?





12. Határozzuk meg az alábbi ábrán látható PERT probléma minimális végrehajtási idejét. DAG-ot kapunk-e akkor, ha a cf él irányítását megfordítjuk? Ha igen, akkor mennyi lesz az így kapott PERT probléma minimális végrehajtási ideje?