Euler-körséták és Hamilton-körök

A számítástudomány alapjai

6. gyakorlat

2023.

Tétel.

(i) Egy irányítatlan G gráfban akkor és csak akkor van Euler-körséta, ha G izolált pontoktól eltekintve öszefüggő és minden csúcsának fokszáma páros.

(ii) Egy irányítatlan G gráfban akkor és csak akkor van Euler-séta, ha G izolált pontoktól eltekintve öszefüggő és a páratlan fokszámú csúcsok száma 0 vagy 2.

(iii) Egy irányított G gráfban akkor és csak akkor van Euler-körséta, ha G izolált pontoktól eltekintve gyengén öszefüggő és minden v csúcsára $\rho(v) = \delta(v)$ teljesül.

Állítás.

Ha a G gráfban létezik k olyan csúcs, amelyeket elhagyva a gráf több, mint k komponensre esik szét, akkor nem létezik a gráfban Hamilton-kör.

Ha a G gráfban létezik k olyan csúcs, amelyeket elhagyva a gráf több, mint $k+1$ komponensre esik szét, akkor nem létezik a gráfban Hamilton-út.

Dirac-tétel.

Ha az n-csúcsú ($n \geq 3$) G gráfban minden pont foka legalább $n/2$, akkor a gráfban létezik Hamilton-kör.

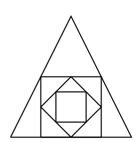
Ore-tétel.

Ha az n-csúcsú ($n \geq 3$) G gráfban minden u, v nemszomszédos csúcspárra teljesül, hogy $d(u)+d(v) \geq n$, akkor a gráfban létezik Hamilton-kör.

Hízlalási lemma.

Ha egy n-csúcsú G gráfban az u és v csúcsokra $d(u) + d(v) \geq n$ teljesül, akkor a G gráfnak pontosan akkor van Hamilton-köre, ha a $G + uv$ gráfnak van Hamilton-köre.

1. Ha lehet, rajzoljuk le az alábbi ábrát egy vonallal, a ceruza felemelése nélkül.



2. Egy G egyszerű gráf csúcsait az $1, 2, \dots, 100$ számok jelölik. Az i és j csúcsok között pontosan akkor vezet él, ha $|i - j| \leq 2$. Van-e G-ben Euler-körséta, Euler-séta, Hamilton-kör, illetve Hamilton-út?

3. Egy gráf csúcsai egy 6-elemű halmaz 3-elemű részhalmazai; két különböző csúcsot akkor kötünk össze, ha a megfelelő halmazoknak legfeljebb 1 közös eleme van. Van-e Euler-körséta a gráfban?

4. Az $r \in \{1, 2, \dots, 9\}$ értékek közül melyekre igaz, hogy minden 10-csúcsú, r-reguláris, egyszerű gráfban van Euler-körséta?

5. Egy 8-csúcsú, egyszerű gráfban nincs izolált pont és minden csúcs foka páros. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzávehető egy él úgy, hogy a gráf egyszerű maradjon és legyen Euler-sétája.

6. A G gráf tartalmaz olyan zárt élsorozatot, amely G minden élét páratlan sokszor tartalmazza. Igaz-e mindig, hogy ekkor G tartalmaz Euler-körsétát is?

7. A G gráfnak 3 piros, 3 fehér és 5 zöld csúcsa van. Minden piros csúcs össze van kötve minden fehér csúccsal, minden zöld csúcs össze van kötve minden más zöld csúccsal, és más él nincs G-ben. Legkevesebb hány élt kell behúzni G-be az egyszerűség megtartásával ahhoz, hogy az így kapott gráfnak legyen

   (a) Euler-körsétája; (b) Hamilton-köre?

8. Egy 59-csúcsú, egyszerű gráfban bármely két csúcs fokszámösszege 60-nál nagyobb páros szám. Igaz-e, hogy a gráfban biztosan van Euler-körséta?

9. Bejárható-e a

   (a) 4×4-es, (b) 3×5-ös, (c) 3×6-os

   sakktábla egy huszárral úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk?

10. A G egyszerű gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok pontosan akkor legyenek szomszédosak G-ben, ha $|x - y| = 2$ vagy $|x - y| = 3$.

    (a) Van-e G-ben Hamilton-út? (b) Van-e G-ben Hamilton-kör?

11. Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű G gráfnak 20 csúcsa van és bármely fokszáma legalább 12, akkor G-nek van két olyan Hamilton-köre, melyeknek nincs közös éle.

12. A 101-csúcsú, egyszerű G gráf egyik csúcsának a fokszáma 50, az összes többi csúcsának a fokszáma pedig legalább 51. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van Hamilton-kör.

13. A G egyszerű gráfnak $2k+1$ csúcsa van és minden csúcsának legalább k a foka. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van Hamilton-út.

14. A G gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_n$. A $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ csúcsokról tudjuk, hogy mindegyiknek a foka legalább $n/2$. (Sajnos a v_n csúcsról ezt nem tudjuk.) Bizonyítsuk be, hogy van egy út G-ben a $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ csúcsokon.

15. Egy társaságban bármely két embernek legalább két közös ismerőse van, továbbá, ha bármely két ember nem ismeri egymást, akkor a társaság bármely harmadik tagját legalább az egyikük ismeri. Bizonyítsuk be, hogy le tudnak ülni egy (megfelelő méretű) kerek asztal köré vagy úgy, hogy mindenki két ismerőse között üljön.

16. A G gráf egy 101-csúcsú „csillag" – vagyis az egyik csúcsa szomszédos az összes többivel, de a gráfnak ezen kívül több éle nincs. (Így tehát G-nek egy 100-fokú és száz 1-fokú csúcsa van.) Minimálisan hány élet kell hozzávenni G-hez, hogy a kapott gráfban legyen Hamilton-kör?

17. Egy 51-csúcsú, összefüggő, egyszerű gráfban egy csúcs foka 30, a többié 19.

    (a) Bizonyítsuk be, hogy a gráf komplementerében van Hamilton-kör.
    (b) Bizonyítsuk be, hogy az eredeti gráfhoz hozzá lehet venni 25 élt úgy, hogy a kapott gráf is egyszerű legyen, és legyen Euler-körsétája.

18. Az $n \geq 3$ csúcsú K_n teljes gráfból töröltük egy feszítőfájának éleit, majd a feszítőfa élei közül visszaraktunk kettőt. Mutassuk meg, hogy az így nyert G gráf tartalmaz Hamilton-kört.

19. Tegyük fel, hogy a 10 csúcsú, egyszerű G gráfban az egyes csúcsok fokszámai rendre 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 9, 9, 9. Bizonyítsuk be, hogy G-nek nincs Hamilton-köre. Mutassuk meg, hogy G-nek van Hamilton-köre, ha a csúcsok fokszámai 3, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6.