Gauss-elimináció

A számítástudomány alapjai

8. gyakorlat

2023.

1. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket.

   (a)
$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 3 \\ 3x + 5y + 10z &= 5 \\ 3x + 2y + 13z &= 2 \\ 6x + 13y + 18z &= 13 \end{aligned}$$

   (b)
$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 3 \\ 3x + 5y + 10z &= 5 \\ 3x + 2y + 13z &= 2 \\ 6x + 13y + 17z &= 13 \end{aligned}$$

   (c)
$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 3 \\ 3x + 5y + 10z &= 5 \\ 3x + 2y + 13z &= 2 \\ 6x + 13y + 17z &= 11 \end{aligned}$$

2. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert. Legfeljebb mennyi lehet egy megoldásban az x_2 ismeretlen értéke, ha $x_4 \leq 13$?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 11 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 5 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 12x_4 &= -8 \end{aligned}$$

3. Van-e olyan megoldása az alábbi lineáris egyenletrendszernek, amiben az x_2 változó értéke pontosan 2-szerese az x_3 változóénak?

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 10 \\ x_1 + x_2 + 4x_4 &= 3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 11x_4 &= 22 \end{aligned}$$

4. Döntsük el, hogy a p valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 6 \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 &= 12 \\ 2x_1 + 6x_2 + px_3 &= 6 \end{aligned}$$

5. Találtunk egy lapot, amin valaki a (lineáris egyenletrendszerek megoldására szolgáló) Gauss-eliminációt gyakorolta. A papír sajnos erősen megrongálódott, ezért csak a kiinduló feladat részletei és a néhány lépés után kapott lépcsős alak olvasható.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \square & 6 & \square & \square & \square \\ 2 & 4 & -4 & 7 & \square \\ 5 & 10 & \square & \square & -4 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

A kiinduló feladatban a $\square$-tel jelölt számok olvashatatlanok. (Ezek persze egymástól különböző értékek is lehetnek.) Rekonstruáljuk a lap elveszett részeit: adjuk meg a $\square$-ekben álló értékeket, majd futtassuk le a Gauss-eliminációt és adjuk meg az egyenletrendszer megoldásait.

6. A boltban árult háromféle müzli alkalmas összekeverésével 1 kg olyan müzlit szeretnénk készíteni, ami 10 dkg mazsolát, 50 dkg zabpelyhet, 10 dkg cerbonát és 30 dkg gyümölcsöt tartalmaz. A boltban árult egyik fajta müzli 20% mazsolát, 70% zabpelyhet, 0% cerbonát és 10% gyümölcsöt tartalmaz, míg a másik két fajtára ezek az arányok 20%, 40%, 20%, 20%, illetve 0%, 10%, 40%, 50%. Kikeverhető-e a kívánt müzli, és ha igen, akkor mennyit használjunk az egyes típusokból?

7. Egy négyváltozós lineáris egyenletrendszerből bárhogyan is hagyunk el egy egyenletet, a kapott egyenletrendszer egyértelműen megoldható lesz. Legkevesebb hány egyenletet kell tartalmazzon az eredeti egyenletrendszer?

8. Legyen

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Kifejezhető-e az $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorokból az $\underline{a}$ vektor?

(b) Kifejezhető-e az $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorokból az $\underline{b}$ vektor?

(c) Az $\mathbb{R}^4$ mely vektorai fejezhetőek ki az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorokból?

(d) Az $\mathbb{R}^4$ mely vektorai fejezhetőek ki az $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorokból?

(e) Az $\mathbb{R}^4$ mely vektorai fejezhetőek ki az $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ és $\underline{b}$ vektorokból?