Altér, generátorrendszer, lineáris függetlenség

A SZÁMÍTÁSTUDOMÁNY ALAPJAI

9. gyakorlat

2023.

Altér.

A $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{R}^n$ részhalmazt az $\mathbb{R}^n$ egy alterének nevezzük, ha V zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve.

Lineáris kombináció.

Legyen $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. A $\lambda_1\underline{v}_1 + \ldots + \lambda_k\underline{v}_k$ vektort a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ vektorok $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ skalárokkal vett lineáris kombinációjának nevezzük.

Generált altér.

Legyen $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$. A

$$\langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k \rangle := \left\{ \lambda_1\underline{v}_1 + \ldots + \lambda_k\underline{v}_k \;\middle|\; \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} \right\}$$

halmazt a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ vektorok által generált altérnek nevezzük.

Lineáris függetlenség.

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszerről azt mondjuk, hogy lineárisan független, ha

$$\lambda_1\underline{v}_1 + \ldots + \lambda_k\underline{v}_k = \underline{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0;$$

ellenkező esetben lineárisan összefüggő vektorrendszerről beszélünk.

Az újonnan érkező vektor lemmája.

Ha az $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_k$ rendszer lineárisan független, de az $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_k, \underline{f}_{k+1}$ rendszer lineárisan összefüggő, akkor $\underline{f}_{k+1} \in \langle \underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_k \rangle$ (vagyis $\underline{f}_{k+1}$ kifejezhető az $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_k$ lineáris kombinációjaként).

Kicserélési lemma.

Legyen $V \leq \mathbb{R}^n$ altér, $F \subseteq V$ lineárisan független rendszer, G pedig V egy generátorrendszere. Ekkor tetszőleges $\underline{f} \in F$ esetén létezik $\underline{g} \in G$, amelyre $F \setminus \{\underline{f}\} \cup \{\underline{g}\}$ is lineárisan független.

F-G egyenlőtlenség.

Legyen $V \leq \mathbb{R}^n$ altér, $\{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_k\} \subseteq V$ lineárisan független rendszer, $\{\underline{g}_1, \ldots, \underline{g}_m\}$ pedig V egy generátorrendszere. Ekkor $k \leq m$.

1. Legyen

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek?

(i) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ (ii) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{a}$ (iii) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{b}$

(b) Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek által generált alteret.

(i) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ (ii) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{a}$ (iii) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{b}$

(c) Igaz-e, hogy az alábbi vektorrendszerek bázist alkotnak $\mathbb{R}^4$-ben?

(i) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{a}$ (ii) $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \underline{b}$

2. A p valós paraméter milyen értékeire lineárisan függetlenek-e az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli vektorok?

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ p \end{pmatrix}, \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ p \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad \underline{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}$$

3. Legyen $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan független vektorrendszer egy tetszőleges vektortérben. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $\underline{a} - \underline{b}$, $\underline{a} - \underline{c}$, $\underline{b} + \underline{c}$ vektorrendszer is lineárisan független.

4. Az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^n$ vektorok lineárisan függetlenek. Következik-e ebből, hogy a $3\underline{a} - \underline{b}$, $2\underline{a} + \underline{c}$ és $4\underline{b} - 3\underline{c}$ vektorok is mindig lineárisan függetlenek?

5. Bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ban a $\underline{v}_1 = (-1, 2, 7)^\top$, $\underline{v}_2 = (1, -3, -6)^\top$ és $\underline{v}_3 = (5, 42, 3)^\top$ vektorok?

6. Adjunk meg egy olyan lineáris egyenletrendszert, aminek a megoldásainak halmaza pontosan az $(1, -1, 2)^\top$, $(-1, 4, -4)^\top$, $(3, 3, 2)^\top$ vektorok által generált altér.

7. Döntsük el, hogy az $\mathbb{R}^4$ vektortérben alteret alkotnak-e az alábbi részhalmazok.

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \, x_3 = 0 \right\}$ (b) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \, x_2 = 1 \right\}$

8. Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^4$-ben azok a vektorok, melyek koordinátái (felülről lefelé)

(a) számtani sorozatot alkotnak; (b) mértani sorozatot alkotnak?

9. Nevezzünk egy $\mathbb{R}^5$-beli vektort Fibonacci-típusúnak, ha a (felülről számítva) harmadiktól kezdve mindegyik eleme a fölötte álló két elem összege. Így például az alábbi vektor Fibonacci-típusú. Igaz-e, hogy a Fibonacci-típusú vektorok alteret alkotnak $\mathbb{R}^5$-ben?

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

10. Tegyük fel, hogy $\underline{0} \neq \underline{u} \in \langle \underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_k \rangle \cap \langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_\ell \rangle$. Bizonyítsuk be, hogy az $\{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_k, \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_\ell\}$ vektorok nem lineárisan függetlenek.

11. Az $\mathbb{R}^n$-beli $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ vektorokról tudjuk, hogy az összegük a nullvektor. Bizonyítsuk be, hogy

$$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{k-1} \rangle = \langle \underline{v}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_k \rangle.$$