A számítástudomány alapjai

Konzultáció

2023.

1. Döntsük el, hogy a c valós paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeszet.

$$\begin{aligned} x_1 + +3x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 + +x_5 &= 11 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 14 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + c \cdot x_5 &= 22 \end{aligned}$$

IX/6. Adjunk meg egy olyan lineáris egyenletrendszert, aminek a megoldásainak halmaza pontosan az $(1, -1, 2)^\top$, $(-1, 4, -4)^\top$, $(3, 3, 2)^\top$ vektorok által generált altér.

2. Határozzuk meg az alábbi vektorok által generált alteret.

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. A p valós paraméter milyen értékeire lineárisan függetlenek-e az alábbi, $\mathbb{R}^4$-beli vektorok?

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 17 \\ 23 \end{pmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 19 \\ 29 \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \underline{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ p \end{pmatrix}$$

4. Határozzuk meg a c valós paraméter minden olyan értékét, melyre az alábbi vektorok $\mathbb{R}^4$ egy generátorrendszerét alkotják.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c \\ c \end{pmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ c \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{d} = \begin{pmatrix} c \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. Mely p valós számok esetén teljesül, hogy az alábbi vektorrendszert $\mathbb{R}^4$ bázisává lehet kiegészíteni?

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ p \\ p \end{pmatrix}$$

6. Álljon a $V \subseteq \mathbb{R}^5$ halmaz azon vektorokból, melyeknek az első 4 koordinátája számtani sorozatot alkot, az utolsó koordináta pedig az első 4 koordináta összege. Így például a $\underline{v} = (1; 3; 5; 7; 16)^\top$ vektor V-beli. Altér-e V az $\mathbb{R}^5$ térben? Ha igen, határozzuk meg V dimenzióját.

7. A W halmaz álljon azokból a $\underline{v} \in \mathbb{R}^5$ vektorokból, amelyekre teljesül, hogy $\underline{v}$ bármely két koordinátájának a különbsége egész szám. Döntsük el, hogy W alteret alkot-e $\mathbb{R}^5$-ben, és ha igen, határozzuk meg a dimenzióját.

8. Számítsuk ki az A^{101} mátrixot az alábbi A mátrixra.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 8 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

9. Az 5×3-as A mátrixra teljesül, hogy az $A \cdot A^\top$ mátrix bal alsó sarkában álló elem 2015. Mi állhat az $A \cdot A^\top$ mátrix jobb felső sarkában?

10. Legyen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az a lineáris transzformáció, melynek mátrixa

$$[f] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások.

(a) Az $(1;1)^\top$ vektor f leképezés szerinti képe $(0;0)^\top$.

(b) Az $(1;1)^\top$ vektor előáll valamilyen $\mathbb{R}^2$-beli vektor képeként.

11. Az $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ lineáris leképezés tetszőleges $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ esetén az $\underline{x}$ és $-\underline{x}$ vektorokhoz ugyanazt a vektort rendeli. Írjuk fel a leképezés $[f]$ mátrixát.

12. Legyen

$$f(p) = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 4 \\ p & 1 & 42 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -6 \end{vmatrix}.$$

Számítsuk ki az $f(42) - f(41)$ értéket.

13. Adjunk példát olyan 5×5-ös mátrixra, melyben 8 egyes és 17 nulla szerepel, a determinánsa pedig 2.

14. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 42 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Van-e olyan $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrix, amire $AB = C$? Ha van, akkor számítsuk ki $|B|$-t.