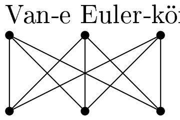
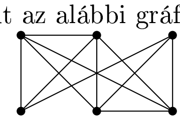
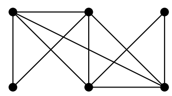
Euler- és Hamilton-körök
Legrövidebb utak keresése

A számítástudomány alapjai
5. gyakorlat

2012. október 11.

Tétel: Egy összefüggő G gráfban akkor és csak akkor van Euler-kör, ha G minden pontjának fokszáma páros.
Tétel: Egy összefüggő G gráfban akkor és csak akkor van Euler-út, ha G-ben a páratlan fokszámú csúcsok száma 0 vagy 2.
Áll. Ha a G gráfban létezik k olyan pont, amelyeket elhagyva a gráf több, mint k komponensre esik szét, akkor nem létezik a gráfban Hamilton-kör.
Ha a G gráfban létezik k olyan pont, amelyeket elhagyva a gráf több, mint $k+1$ komponensre esik szét, akkor nem létezik a gráfban Hamilton-út.
Dirac-tétel: Ha az n pontú G gráfban minden pont foka legalább $n/2$, akkor a gráfban létezik Hamilton-kör.
Ore-tétel: Ha az n pontú G gráfban minden x, y nemszomszédos csúcsokra teljesül, hogy $d(x)+d(y)\geq n$, akkor a gráfban létezik Hamilton-kör.

1. Van-e Euler-kör, illetve Euler-út az alábbi gráfokban?

2. Mely $n \geq 2$ esetén tartalmaz Euler-kört, illetve Euler-utat az n csúcsú K_n teljes gráf?
3. Egy egyszerű G gráf csúcsait az $1, 2, \ldots, 100$ számok jelölik. Az i és j csúcsok között pontosan akkor vezet él G-ben, ha $|i-j| \leq 2$. Tartalmaz-e G Euler-kört, illetve Euler-utat?
4. Egy 12 egység hosszú drótból szeretnénk elkészíteni egy egységkocka élvázát úgy, hogy a kocka csúcsainál forrasztunk. Legkevesebb hány darabra kell felvágni ehhez az eredeti drótunkat? Mi a válasz akkor, ha a testátlóknak is benne kell lenniük az élvázban, és persze a kiindulási drótunk is 4 testátlónyival hosszabb?
5. A G gráfot úgy kapjuk, hogy az $1, 2, \ldots$ csúcscímkékkel ellátott teljes gráfban párhuzamos élekként megkettőzzük a $(2, 3, 2, 2, 5, 3, 5, 2)$ Prüfer-kódú F feszítőfa éleit. Van-e G-nek Euler-körsétája?
6. Tegyük fel, hogy G egy összefüggő gráf, és hogy K egy olyan köre G-nek, amelynek tetszőleges élét törölve, a kapott út G egy leghosszabb útja lesz. Bizonyítsuk be, hogy ekkor K Hamilton-köre G-nek.
7. Bejárható-e az (a) 4×4-es, (b) 3×5-ös, (c) 3×6-os sakktábla egy huszárral úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk?
8. A G egyszerű gráfnak $2n+1$ csúcsa van és minden csúcsának legalább n a foka. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van Hamilton-út!
9. Egy G egyszerű gráf csúcsait az $1, 2, \ldots, 100$ számok jelölik. Az i és j csúcsok között pontosan akkor vezet él, ha $|i-j| \leq 2$. Tartalmaz G Hamilton-kört, illetve Hamilton-utat?
10. Egy $3 \times 3 \times 3$ méretű sajtkocka 27 kis kockából áll. Egy egér a kis kockákat egyesével tervezi elfogyasztani úgy, hogy egy kis kocka után mindig olyan következzen, amelyiknek éppen az elfogyasztottal van közös lapja. Az egér az egyik sarokból kezdi a lakomát.
    (a) El tudja-e fogyasztani a teljes sajtot úgy, hogy utoljára olyan kockát fogyasszon, amelyiknek van közös lapja az elsővel?
    (b) És úgy, hogy a középső -legfinomabb- kockánál fejezze be az evést?

11. Az $n \geq 3$ pontú K_n teljes gráfból töröltük egy feszítőfájának éleit, majd a feszítőfa élei közül visszaraktunk kettőt. Mutassuk meg, hogy az így nyert G gráf tartalmaz Hamilton-kört!

12. Egy 51 csúcsú összefüggő egyszerű gráfban egy csúcs foka 30, a többié 19.

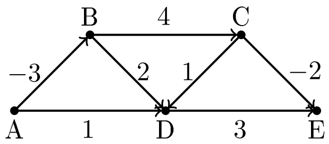
    (a) Bizonyítsuk be, hogy a gráf komplementerében van Hamilton-kör.

    (b) Bizonyítsuk be, hogy az eredeti gráfhoz hozzá lehet venni 25 élet úgy, hogy a kapott gráf is egyszerű legyen, és legyen Euler-köre.

13. Mutassuk meg, hogy ha G egy 16 csúcsú 9-reguláris egyszerű gráf, akkor G-ből elhagyható 8 él úgy, hogy a maradék gráfnak legyen Euler-köre.

14. Adott a G irányítatlan gráf a következő éllistával: **a**: b, c; **b**: a, d; **c**: a, d; **d**: b, c, e, f; **e**: d, f, g; **f**: d, e, g, h; **g**: e, f, h; **h**: f, g. Keressünk G-ben a-ból kiinduló szélességi feszítőfát! Mennyi lesz a csúcsok a-tól való távolsága?

15. Határozzuk meg az A csúcsból az összes többi csúcsba vezető legrövidebb út hosszát az alábbi gráfban a Bellman-Ford algoritmussal, illetve Floyd módszerével az összes pontpárra a legrövidebb út hosszát!



16. Egy irányított gráf csúcshalmaza $\{a, b, c, d, e, f\}$, az élek és súlyaik pedig az alábbiak: $s(a, b) = 5$, $s(a, e) = 6$, $s(b, c) = 4$, $s(b, d) = 6$, $s(c, a) = 3$, $s(c, d) = 1$, $s(d, e) = 2$, $s(e, c) = 2$, $s(e, f) = 1$, $s(f, b) = 3$, $s(f, c) = 1$, $s(f, d) = 1$. Dijkstra módszerével határozza meg a-ból az összes többi csúcsba vezető legrövidebb út hosszát.

17. Adjuk meg az összes olyan minimális élszámú irányított gráfot (élsúlyokkal együtt), amelyekre az alábbi táblázat a Dijkstra-algoritmusban szereplő D tömb változásait mutathatja.

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
0	2	6	∞	∞	7
0	2	5	9	∞	6
0	2	5	6	9	6
0	2	5	6	8	6
0	2	5	6	7	6