

Többszörös összefüggőség

Páros gráfok, párosítások

7. gyakorlat

2011. október 25.

Def. Egy G gráfot k -szorosán (pont)összefüggőnek nevezünk, ha legalább $k+1$ pontja van, és akárhogy hagyunk el belőle k -nál kevesebb pontot, a maradék gráf összefüggő marad. A legnagyobb olyan k számot, amelyre még a G gráf k -szorosán összefüggő, $\kappa(G)$ -vel jelöljük.

Def. Egy G gráfot k -szorosán élösszefüggőnek nevezünk, ha akárhogy hagyunk el belőle k -nál kevesebb élet, a maradék gráf összefüggő marad. A legnagyobb olyan k számot, amelyre még a G gráf k -szorosán élösszefüggő, $\lambda(G)$ -vel jelöljük.

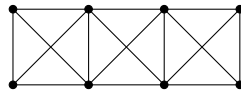
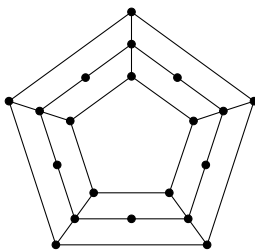
Állítás: A G gráf akkor és csak akkor k -szorosán összefüggő, ha legalább $k+1$ pontja van, és bármely két pontja között létezik k pontidegen út.

Állítás: A G gráf akkor és csak akkor k -szorosán élösszefüggő, ha bármely két pontja között létezik k élidegen út.

Frobenius-tétel: Egy $G = (A, B, E)$ páros gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha $|A| = |B|$ és minden $X \subseteq A$ részhalmazra $|X| \leq |N(X)|$ teljesül.

Hall-tétel: Egy $G = (A, B, E)$ páros gráfban akkor és csak akkor van A -t lefedő párosítás, ha minden $X \subseteq A$ részhalmazra $|X| \leq |N(X)|$ teljesül.

1. Hányszorosán összefüggő
(a) egy fa;
(b) egy kör;
(c) egy teljes gráf?
2. Hányszorosán összefüggők az alábbi gráfok?



3. Mutassuk meg, hogy egy háromszorosán összefüggő gráfban mindig létezik páros hosszúságú kör.
4. Határozzuk meg azt a legnagyobb k számot, amelyre a $K_{n,n}$ teljes páros gráf k -szorosán összefüggő.
5. Bizonyítsuk be, hogy a K_n gráf $(n-1)$ -szeresen élösszefüggő, de n -szeresen nem.
6. A 10-csúcsú teljes gráfnak legfeljebb hány élet lehet elhagyni úgy, hogy a maradék gráf 4-szeresen élösszefüggő legyen?
7. Minden $k > 1$ egészre mutassunk olyan egyszerű gráfot, amely k -szorosán élösszefüggő, de csak egyszeresen összefüggő.
8. Mutassuk meg, hogy egy fának nem lehet két különböző teljes párosítása.
9. Egy 12 fiúból és 12 lányból álló társaságban mindenki legalább 6 embert ismer az ellenkező neműek közül (az ismeretségek kölcsönösek). Bizonyítsuk be, hogy ekkor az egész társaság egymást ismerő fiú-lány párokba állítható.

10. Egy kiránduláson a résztvevő n házaspár között akarunk szétosztani $2n$ különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy mindenki legalább n fajtát szeret a csokoládék közül, és hogy minden csokoládét minden házaspárnak legalább az egyik tagja szereti. Bizonyítsuk be, hogy a csokoládék kioszthatók úgy, hogy mindenki olyat kapjon, amelyet szeret.
11. G egy páros gráf, A és B osztályokkal, és minden $X \subseteq A$ halmazra $|N(X)| \geq |X| - 1$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz olyan párosítást, ami A -t egy pont kivételével lefedi.
12. A villamosmérnök-hallgatók számára beüzemelték néhány számítógépet. Minden hallgatónak legalább 10 gépre van belépési jogosultsága, minden gépen pedig legfeljebb 7 hallgatónak van felhasználói fiókja. Igaz-e, hogy ekkor bizonyosan leültethetünk minden villamosmérnök-hallgatót egy-egy különböző számítógéphez úgy, hogy mindenki olyan géphez üljön, amire be tud lépni?