

Párosítások; Független és lefogó pont- illetve élhalmazok; Színezés; Síkbarajzolható gráfok

8. gyakorlat

2012. november 8.

$\alpha(G)$: független pontok maximális száma

$\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma

$\nu(G)$: független élek maximális száma

$\rho(G)$: lefogó élek minimális száma

Állítás: $\nu(G) \leq \tau(G)$ minden G gráfra.

Állítás: $\alpha(G) \leq \rho(G)$ minden G gráfra.

Gallai-tétel: $\tau(G) + \alpha(G) = |V(G)|$ minden hurokélmentes G gráfra.

Gallai-tétel: $\nu(G) + \rho(G) = |V(G)|$ minden G gráfra, amelyben nincs izolált pont.

Kőnig-tétel: Ha $G = (A, B, E)$ páros gráf, akkor $\nu(G) = \tau(G)$. Ha nincs G -ben izolált pont, akkor $\alpha(G) = \rho(G)$ is teljesül.

Definíció: Egy G hurokélmentes gráf *kromatikus száma* $\chi(G) = k$, ha G k színnel kiszínezhető, de $k - 1$ színnel nem.

Definíció: A G gráf egy teljes részgráfját *klikknek* nevezzük. A G -ben található maximális méretű klikk méretét $\omega(G)$ -vel jelöljük és a gráf *klikkszámának* nevezzük.

Állítás: Minden G gráfra $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Brooks-tétel: Ha G egyszerű, összefüggő gráf, nem teljes gráf és nem páratlan hosszú kör, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Állítás: Minden G gráfra $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.

Vizing-tétel: Minden G gráfra $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

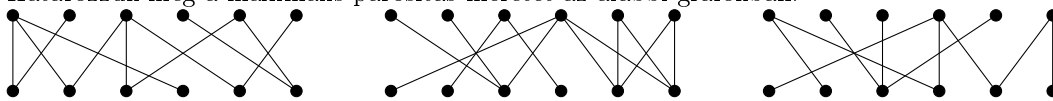
Euler-formula: Ha egy összefüggő síkgráfnak n csúcsa, e éle és t tartománya van, akkor teljesül rá, hogy $n - e + t = 2$.

Állítás: Ha a G egyszerű síkgráfnak legalább 3 csúcsa van, akkor az előbbi jelölésekkel $e \leq 3n - 6$.

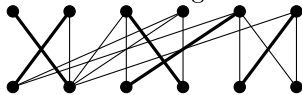
Kuratowski-tétel: Egy gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz olyan részgráfot, amely topologikusan izomorf $K_{3,3}$ -mal vagy K_5 -tel.

Definíció: Két gráfot gyengén izomorfnek nevezünk, ha éleik között kölcsönösen egyértelmű és körtartó leképezés hozható létre.

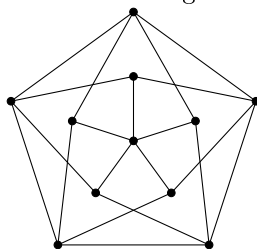
1. Határozzuk meg a maximális párosítás méretét az alábbi gráfokban.



2. Keressünk a megadottnál nagyobb méretű párosítást az alábbi gráfban!

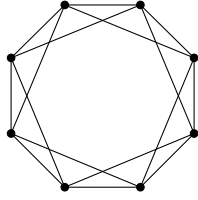
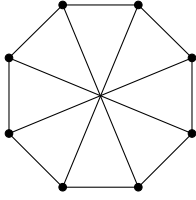


3. Határozzuk meg az alábbi gráfban a $\tau(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ és $\alpha(G)$ értékeket!

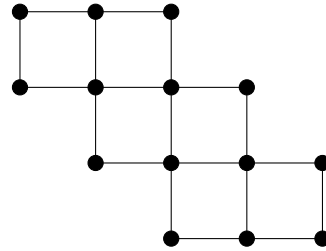
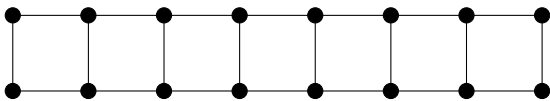


4. A G gráf csúcsai v_1, v_2, \dots, v_{40} . A v_i és v_j pontok akkor és csak akkor vannak éllel összekötve, ha $|i - j| = 3$ vagy $|i - j| = 5$. Határozzuk meg a $\tau(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ és $\alpha(G)$ értékeket!

5. Határozzuk meg az alábbi gráfok kromatikus számát!



6. Legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$, és legyen $ij \in E(G)$, ha $|i - j| \leq 7$. Mennyi az így meghatározott G gráf kromatikus száma?
7. Legyenek a G gráf csúcsai a sakktábla mezői. Két mező között akkor fusson él, ha a huszár (bástya, futó) egy lépésben az egyik mezőről a másikra léphet. Mennyi a G gráf kromatikus száma?
8. Legyenek $G_1 = (V, E_1)$, $G_2 = (V, E_2)$ tetszőleges (véges) gráfok, és legyen $G = (V, E_1 \cup E_2)$. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq \chi(G_1)\chi(G_2)$.
9. Mennyi a Petersen-gráf élkromatikus száma?
10. Legyen G egy 100-reguláris egyszerű gráf 2001 ponton. Határozzuk meg $\chi'(G)$ értékét.
11. Legyen G olyan 3-reguláris egyszerű gráf, melyben van elvágó él. Mutassuk meg, hogy ekkor $\chi'(G) = 4$.
12. Hány csúcsa van annak a síkgráfnak, amit három háromszög-, három négyszög- és egy ötszöglap határol?
13. Mutassuk meg, hogy ha $|V(G)| \geq 11$, akkor G és \overline{G} egyike biztosan nem síkgráf.
14. Egy mezőn k ház és k kút áll. Minden háztól pontosan 4 (különböző) kúthoz vezet (közvetlenül) út. Mutassuk meg, hogy biztosan van két olyan út, amelyek keresztezik egymást!
15. Síkbarajzolhatók-e a K_6 , $K_{4,2}$, $K_{4,3}$, $K_5 - e$, $K_{3,3} - e$, $\overline{C_7}$ gráfok?
16. Bizonyítsuk be, hogy minden egyszerű síkgráfban
- (a) a minimális fokszám legfeljebb 5;
 - (b) ha a minimális fokszám 5, akkor legalább 12 ötödfokú csúcs van.
17. Van-e olyan egyszerű síkgráf, aminek feleannyi csúcsa van, mint a duálisának?
18. Gyengén izomorfak-e az alábbi gráfok?



19. Bizonyítsuk be, hogy két fa pontosan akkor gyengén izomorf, ha ugyanannyi csúcsuk van.
20. Mutassuk meg, hogy tetszőleges egyszerű síkgráf előáll, mint 2 páros gráf élhalmazának uniója.