A számítástudomány alapjai
2. Konzultáció

2012. november 19.

1. A 100 csúcsú G gráf két 50 hosszú kör diszjunkt uniója. Minimálisan hány élt kell behúzni G-be, hogy a kapott gráf egyszerű legyen, és legyen Euler-köre?

2. A G gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_n$. A $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ csúcsokról tudjuk, hogy mindegyiknek a foka legalább $n/2$. (Sajnos a v_n csúcsról ezt nem tudjuk.) Bizonyítsuk be, hogy van egy út G-ben a $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ csúcsokon.

3. Legyenek $H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}$ a K_{4n} teljes gráf Hamilton-körei, és jelölje G azt a gráfot, amit K_{4n}-ből kapunk, miután töröltük mindezen Hamilton-körök éleit. Bizonyítsuk be, hogy G-nek van Hamilton-köre.

4. Legyen a $G = (V, E)$ gráf csúcshalmaza $V = \{27, 28, \ldots, 33\}$, él pedig akkor fusson két csúcs között, ha indexeik relatív prímek: $E = \{ij : (i, j) = 1\}$. Rajzoljuk le G diagramját, indítsunk a „27” csúcsból szélességi bejárást, valamint határozzuk meg a bejáráshoz tartozó fát és a többi csúcsnak a „27” csúcstól való távolságát.

5. Legyen G teljes gráf a $\{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ ponthalmazon és a v_iv_j él hossza legyen $l(v_iv_j) = \frac{4}{(i,j)}$. Határozzuk meg a v_4 csúcs távolságát G többi csúcsától. Megváltoztatható-e a v_7v_8 él hossza úgy, hogy v_4 és v_7 távolsága 3 legyen?

6. (a) Bizonyítsuk be, hogy az alábbi hálózatban a maximális folyam nagysága 12.
   (b) El lehet érni egyetlen él kapacitásának a megváltoztatásával, hogy a maximális folyam nagysága 13 legyen? (Ha igen, hogyan? Ha nem, miért nem?)
   (c) El lehet érni két él kapacitásának a megváltoztatásával, hogy a maximális folyam nagysága 14 legyen? (Ha igen, hogyan? Ha nem, miért nem?)

7. Határozzuk meg az összes olyan x számot, amelyre a maximális folyam értéke 8.

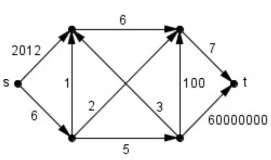
8. Az alábbi ábrán látható G gráfban az élekre írt számok az egyes élek kapacitását jelentik. Határozzunk meg az összes irányított st utat lefogó élhalmazok közül egy minimális kapacitásút.

9. Legyen G egy tetszőleges 3-élösszefüggő gráf, és legyen C a G egy 3 élt tartalmazó köre. Bizonyítsuk be, hogy G-ből C éleit törölve összefüggő gráfot kapunk.

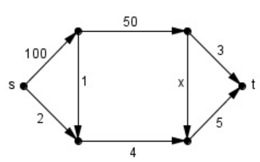
10. A G gráf csúcsai a sakktábla mezői, két csúcs akkor és csak akkor van összekötve éllel, ha a megfelelő mezők ugyanabban az oszlopban, vagy szomszédos oszlopban vannak. Határozzuk meg G pont-összefüggőségi számát.

11. Tegyük fel, hogy a G páros gráfban az A és B színosztályok mérete azonos, továbbá, hogy A tetszőleges nemüres X részhalmazára igaz az $|N(X)| \geq |X| + 1$ feltétel. Mutassuk meg, hogy G bármely e éléhez létezik G-nek e-t tartalmazó teljes párosítása.

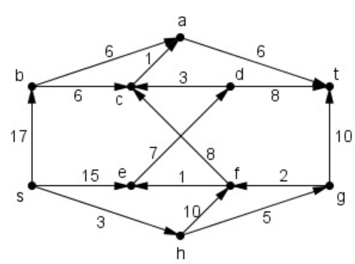
12. G egy páros gráf, A és B színosztályokkal. A-ban minden pont foka 40, B-ben 30.
   (a) Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz A-t fedő párosítást.
   (b) Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz 10 éldiszjunkt A-t fedő párosítást.
13. Tekintsük az összes olyan G 100 csúcsú gráfot, amelyeknél a lefogó pontok minimális száma $\tau = 3$. Mennyi az élek számának maximuma, illetve minimuma?
14. Tegyük fel, hogy $\nu(G) = 2$ és $\tau(G) = 4$. Bizonyítsuk be, hogy $3 \leq \chi(G) \leq 5$.
15. Tegyük fel, hogy a G gráf 4-színezhető és véges. Igazoljuk, hogy kiválasztható G éleinek legfeljebb hatodrésze úgy, hogy a kiválasztott élek G-ből való törlésével kapott G' gráf 3-színezhető legyen.
16. Tegyük fel, hogy 77 iskolás levelez egymással úgy, hogy mindegyiküknek pontosan 8 levelezőpartnere van. Megvalósítható-e, hogy a levelezéshez 8-féle színű borítékot használnak úgy, hogy mindenki különböző színű borítékot használjon az egyes levelezőpartnereihez, és bármely két levelezőtárs között mindkét irányú levélforgalomhoz azonos színű borítékot használjanak?
17. Tegyük fel, hogy G olyan gráf, amire $\Delta(G) \leq 3$ és G-nek legfeljebb 5 harmadfokú csúcsa van. Bizonyítsuk be, hogy G síkbarajzolható.
18. Síkbarajzolható-e az ábrán látható gráf?
19. Egy összefüggő síkgráfnak 700 csúcsa és 1000 éle van. Bizonyítsuk be, hogy a duálisa nem egyszerű gráf.
20. Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráf három olyan feszítőfát tartalmaz, amiknek nincs közös éle. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G-nek van K_5-tel vagy $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfja!
21. Határozzuk meg az alábbi $PERT$ probléma optimális ütemezése melletti kritikus tevékenységeket!



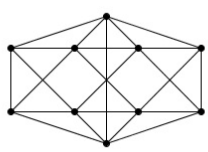
(a) 6. feladat



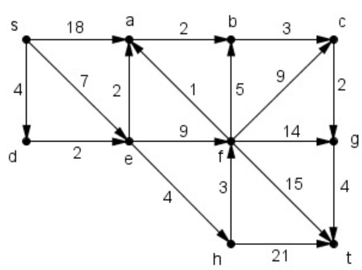
(b) 7. feladat



(c) 8. feladat



(d) 18. feladat



(e) 21. feladat