Összefoglaló

V. 2014-02-24

Vektor-skalár függvények, görbék, kísérő triéder

Legyen $\mathbf{r}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3; t \mapsto \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Értékkészlete a $\mathcal{G}$ görbe. Deriváltját $\dot{\mathbf{r}}$ jelöli.
D: Sima görbe: az $\mathbf{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény értékkészlete sima görbe, ha $\dot{\mathbf{r}}$ létezik, folytonos és sehol sem $\mathbf{0}$ az $[a,b]$ intervallumon.
D: Sima görbe $\mathbf{r}(a)$ és $\mathbf{r}(b)$ közti ívhossza: $L = \int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,\mathrm{d}t$, ha $\mathbf{r}$ a görbét csak egyszer futja be.
D: Egy $\mathbf{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvénnyel megadott $\mathcal{G}$ görbe paramétere ívhosszparaméter, ha a görbe bármely két $c, d \in [a,b]$ paraméteréhez tartozó $\mathbf{r}(c)$ és $\mathbf{r}(d)$ pontja közti görbe ívhossza $|d-c|$. Az ívhosszparaméterrel megadott $\mathbf{r}$ függvény deriváltját $\mathbf{r}'$ jelöli.
Az $\mathbf{r}(t_0)$ kezdőpontú görbe egyik ívhosszparamétere: $s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{\mathbf{r}}(\tau)|\,\mathrm{d}\tau$.

	tetszőleges paraméterrel	ívhosszparaméterrel
Érintő egységvektor	$\mathbf{T}(t) = \dfrac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{\dot{s}(t)} = \dfrac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{\lvert\dot{\mathbf{r}}(t)\rvert}$	$\mathbf{T}(s) = \mathbf{r}'(s)$
Főnormális egységvektor	$\mathbf{N}(t) = \dfrac{\dot{\mathbf{T}}(t)}{\lvert\dot{\mathbf{T}}(t)\rvert} = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t)$	$\mathbf{N}(s) = \dfrac{\mathbf{T}'(s)}{\lvert\mathbf{T}'(s)\rvert} = \dfrac{1}{\kappa(s)}\mathbf{T}'(s) \quad (\text{ha } \kappa(s) \neq 0)$
Binormális egységvektor	$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) = \dfrac{\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)}{\lvert\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)\rvert}$	$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$
Görbület	$\kappa(t) = \dfrac{\lvert\dot{\mathbf{T}}(t)\rvert}{\lvert\dot{\mathbf{r}}(t)\rvert} = \dfrac{\lvert\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)\rvert}{\lvert\dot{\mathbf{r}}(t)\rvert^3}$	$\kappa(s) = \lvert\mathbf{T}'(s)\rvert = \lvert\mathbf{r}''(s)\rvert$
Torzió	$\tau(t) = \dfrac{\dot{\mathbf{r}}(t)\ddot{\mathbf{r}}(t)\dddot{\mathbf{r}}(t)}{\lvert\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)\rvert^2}$	$\tau(s) = -\mathbf{B}'(s) \cdot \mathbf{N}(s) = \left\{\lvert\mathbf{B}'(s)\rvert \text{ vagy } -\lvert\mathbf{B}'(s)\rvert\right\}$ $\left(= \dfrac{\mathbf{r}'(s)\mathbf{r}''(s)\mathbf{r}'''(s)}{\lvert\mathbf{r}''(s)\rvert^2}\right)$

T: Simulókör sugara $\rho = 1/\kappa$.
D: Simulósík: $\mathbf{T}$ és $\mathbf{N}$ síkja, normálvektora $\mathbf{B}$.
T: Simulósík egyenlete $[(x,y,z) - \mathbf{r}(t_0)]\dot{\mathbf{r}}(t_0)\ddot{\mathbf{r}}(t_0) = 0$, azaz $\begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ \dot{x}(t_0) & \dot{y}(t_0) & \dot{z}(t_0) \\ \ddot{x}(t_0) & \ddot{y}(t_0) & \ddot{z}(t_0) \end{vmatrix} = 0$
D: Görbület: az egységnyi irányvektor változási sebességének abszolút értéke az út függvényében. (Értéke nemnegatív, az egyenes iránytól való eltérés gyorsaságát méri.)
D: Torzió: a binormális egységvektor változási sebességének abszolút értéke az út függvényében, megszorozva -1-gyel vagy 1-gyel aszerint, hogy a binormális deriváltja egyirányú vagy ellenkező irányú a főnormálissal. (A görbe simulósíkból való „kicsavarodásának” sebességét adja meg, előjele aszerint pozitív vagy negatív, hogy a simulósík melyik oldala felé csavarodik. Síkgörbe torziója 0.)
T: A gyorsulásvektor érintő- és főnormális irányú komponensei: Legyen $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$, $\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$. Az $\mathbf{a}$ gyorsulásvektor fölírható $\mathbf{T}$ és $\mathbf{N}$ lineáris kombinációjaként, nevezetesen:

$$\mathbf{a} = a_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + a_{\mathbf{N}}\mathbf{N} = \ddot{s}\mathbf{T} + \kappa\dot{s}^2\mathbf{N}, \qquad \left(a_{\mathbf{T}} = \ddot{s} = |\mathbf{v}|^{\cdot} = |\dot{\mathbf{r}}|^{\cdot},\ a_{\mathbf{N}} = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_{\mathbf{T}}^2} = \kappa\dot{s}^2 = \kappa|\mathbf{v}|^2 = \kappa|\dot{\mathbf{r}}|^2\right)$$

Vonalintegrál, görbementi integrál

Adva van egy $\mathcal{C}$ görbe, annak egy síma $\mathbf{r}(s)$ ívhossz szerinti és egy síma $\mathbf{r}(t)$ paraméterezése, továbbá egy skalárértékű $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és egy vektorértékű $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény ($n = 2$ vagy 3).

Számítandó	$\mathcal{C}$	$\mathbf{r}(s)$, $s \in [s_1, s_2]$	$\mathbf{r}(t)$, $t \in [t_1, t_2]$
Ívhossz	$\int_{\mathcal{C}} 1 = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}s$	$\int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}s = s_2 - s_1$	$\int_{t_1}^{t_2} \lvert\dot{\mathbf{r}}(t)\rvert\,\mathrm{d}t$
Vonalintegrál (f)	$\int_{\mathcal{C}} f = \int_{\mathcal{C}} f(\mathbf{r})\,\mathrm{d}s$	$\int_{s_1}^{s_2} f(\mathbf{r}(s))\,\mathrm{d}s$	$\int_{t_1}^{t_2} f(\mathbf{r}(t))\lvert\dot{\mathbf{r}}(t)\rvert\,\mathrm{d}t$
Görbementi integrál ($\mathbf{F}$)	$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$	$\int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(s)) \cdot \mathbf{r}'(s)\,\mathrm{d}s$	$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)\,\mathrm{d}t$

Felszín, felületi és felületmenti integrálok

Adva van egy $\mathcal{S}$ felületdarab, melynek vetülete a $\mathbf{p}$ irányra merőleges koordinátasíkon $\mathcal{T}$ ($\mathbf{p} = \mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ vagy $\mathbf{k}$). Az $\mathcal{S}$ megadása történhet az implicit $f(x, y, z) = c$ egyenletettel, vagy egy $(u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v)$ függvény értékkészletével. Adva vannak még az $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ és az $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ függvények.

Számítandó	$\mathcal{S}$	$f(x,y,z) = c$	$\mathbf{r}(u,v)$ értékkészlete
Felszín	$\iint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}\sigma$	$\iint_{\mathcal{T}} \frac{\lvert\nabla f\rvert}{\lvert\nabla f \cdot \mathbf{p}\rvert}\,\mathrm{d}A$	$\iint_{\mathcal{T}} \lvert\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\rvert \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$
Felületi integrál (g)	$\iint_{\mathcal{S}} g\,\mathrm{d}\sigma$	$\iint_{\mathcal{T}} g\frac{\lvert\nabla f\rvert}{\lvert\nabla f \cdot \mathbf{p}\rvert}\,\mathrm{d}A$	$\iint_{\mathcal{T}} g(\mathbf{r})\lvert\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\rvert \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$
Felületmenti integrál ($\mathbf{F}$)	$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma$	$\pm\iint_{\mathcal{T}} \mathbf{F}\cdot\frac{\nabla f}{\lvert\nabla f \cdot \mathbf{p}\rvert}\,\mathrm{d}A$	$\pm\iint_{\mathcal{T}} \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ $= \pm\iint_{\mathcal{T}} \mathbf{F}(\mathbf{r})\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

Deriváltak

$\mathcal{S}$ egy felületdarab, felszínét jelölje $\Delta\mathcal{S}$, határoló görbéjét $\mathcal{C}$. Ha $\mathcal{S}$ egy zárt felület, az általa határolt testet jelölje $\mathcal{D}$, annak térfogatát $\Delta\mathcal{D}$.

Fogalom	definíció	kiszámítása
differenciálhányados	$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$	deriválási szabályok, képletek
divergencia	$\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r}_0) = \lim\limits_{\Delta\mathcal{D}\to 0}\frac{1}{\Delta\mathcal{D}}\iint_{\mathcal{S}}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma$	$\operatorname{div}\mathbf{v} = \nabla\mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$
rotáció	$\mathbf{n}_0\,\mathbf{rot}\,\mathbf{v}(\mathbf{r}_0) = \lim\limits_{\Delta\mathcal{S}\to 0}\frac{1}{\Delta\mathcal{S}}\oint_{\mathcal{C}}\mathbf{v}(\mathbf{r})\cdot\,\mathrm{d}\mathbf{r}$	$\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = \nabla\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$

$\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\,f = \mathbf{0}$, $\operatorname{div}\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = 0$, $\operatorname{div}\mathbf{grad}\,f = \triangle f$

$$\left(\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right],\ \ \triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.\right)$$

Integrálredukciós tételek

Tétel neve	Formula
Newton–Leibniz	$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$
Stokes	$\oint_{\mathcal{C}}\mathbf{v}(\mathbf{r})\cdot\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}}\mathbf{rot}\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma$
Gauss–Osztrogradszkij	$\iint_{\mathcal{S}}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_{\mathcal{D}}\operatorname{div}\mathbf{v}\,\mathrm{d}V$