

Komplex számok

Wettl Ferenc

2006. szeptember 19.

1 Számok

- A számfogalom bővülése
- Egy kis történelem
- A megoldóképlet egy speciális esetre
- Lehet számolni negatív szám gyökével
- Műveletek komplex számokkal

- pozitív egészek – összeadás, szorzás
- $a + x = b$ megoldhatósága \rightarrow negatív számok és 0
- $ax = b$ megoldhatósága \rightarrow racionális számok
- $x^2 = 2$ megoldása \rightarrow vannak nem racionális számok is
- sorozatok határértékének fogalma \rightarrow irracionális számok
- racionális + irracionális számok \rightarrow valós számok
- és mi van az $x^2 = -1$ egyenlet megoldhatóságával? Szükség van további bővítésre?

- Girolamo Cardano (1501–1576) orvos, filozófus, matematikus – 1538 körül értesül arról, hogy Scipione del Ferro és Niccolò Tartaglia egymástól függetlenül felfedezték az $x^3 + px = q$ alakú harmadfokú egyenlet megoldását – 1545-ben megírja „Ars magna sive de regulis algebraicis” című művét, benne a megoldóképlettel – 1552-től kezdődően Európa egyik leghíresebb orvosa – a 60-as évek elején elveszti két fiát (gyilkosságért halál, rablásért száműzetés) – 1570-ben Bolognában bebörtönzik, szabadulása után Rómába költözik
- Scipione del Ferro (1465–1526) felfedezi a harmadfokú egyenlet megoldásának módját – titokban tartja (kivételesen Nave, Fiore)
- Niccolò Fontana (1500?–1557) gúnynevén Tartaglia (dadogó) (1511 Brescia, francia dúlás) – 1535: Fiore kihívja Tartagliát egy 15 napos versenyre (30 feladat, a vesztes a győztest és 29 barátját megvendégeli) – felkészüléskor Tartaglia rájön a nehezebb típusú harmadfokú egyenletek megoldásának módjára

- Cardano (kilátásba helyezve Tartaglia tüzérségi találmányainak pártfogót keres, titoktartás ígérete mellett megszerzi a titkot) – amikor Navétól megtudja, hogy del Ferro is ismerte e képleteket, felmentve érzi magát, és publikálja (a negyedfokú esetre is továbbfejlesztve az eredményt)
- Tartaglia leírta „megcsalatasának” történetét
- Milánóban Ferrari (Cardano tanítványa) vitára hívja Tartagliát, aki a vitát elveszti, ennek következtében lehetőségeit (nyilvános előadások) elveszíti

Oldjuk meg az $x^3 = bx + c$ egyenletet!

A Tartaglia által talált képlet:

$$x = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}}$$

Oldjuk meg a $x^3 = 7x + 6$ egyenletet!

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\frac{6}{2} + \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{6}{2} - \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{3}\right)^3}} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt[3]{81 + 30\sqrt{-3}} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{81 - 30\sqrt{-3}} \\ &= \frac{1}{3} \left(9/2 + 1/2\sqrt{-3}\right) + \frac{1}{3} \left(9/2 - 1/2\sqrt{-3}\right) \\ &= 3 \end{aligned}$$

Jelölés

$$i = \sqrt{-1}$$

Definíció

Az $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ alakú kifejezéseket komplex számoknak nevezzük, ahol i az a szám, melyre $i^2 = -1$. Egy komplex szám több alakba is felírható, ezt az alakot algebrai alaknak nevezzük. A komplex számok halmazát \mathbb{C} jelöli.

Komplex számok ábrázolása, komplex számsík, komplex számgömb.

Definíció

Az (a, b) vektor x -tengellyel bezárt szöge legyen φ , hossza r . Ekkor a $z = a + ib$ komplex szám felírható $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ alakban is, hisz $a = r \cos \varphi$, és $b = r \sin \varphi$. r -et a komplex szám abszolút értékének, φ -t argumentumának nevezzük.

- $z_1 = a_1 + b_1i = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$,
 $z_2 = a_2 + b_2i = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$
- algebrai alakban: összeadás, kivonás, szorzás algebrai kifejezésként az $i^2 = -1$ helyettesítést használva; osztás a nevező konjugáltjával való bővítéssel.

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + a_2) \pm (b_1 + b_2)i,$$

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{(a_2 + b_2i)(a_2 - b_2i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2},$$

- trigonometriai alakban:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \text{ ahol}$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1.$$