(1.) $\left(\frac{z}{1+i}\right)^5 = 2\cdot\left(\left(1+\sqrt{3}\right) + i\left(1-\sqrt{3}\right)\right)$

$z^5 = 2\left(\left(1+\sqrt{3}\right) + i\left(1-\sqrt{3}\right)\right)\left(1+i\right)^5$ $\Big\}$ 1p

$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$(1+i)^5 = 2^{5/2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 2^{5/2}(-1-i)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = -2^2(1+i)$ $\Big\}$ 2p

(esetleg: $(1+i)^4 = -4$ látszik rögtön)

$z^5 = -2^3\left(\left(1+\sqrt{3}\right) + i\left(1-\sqrt{3}\right)\right)(1+i) = -2^3\left(\left(1+\sqrt{3}\right) - \left(1-\sqrt{3}\right) + i\left(\left(1-\sqrt{3}\right)+\left(1+\sqrt{3}\right)\right)\right) =$

$= -2^3\left(2\sqrt{3} + 2i\right) = 2^5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

(esetleg $\left(1+\sqrt{3}\right) + i\left(1-\sqrt{3}\right)$ rögtön trig. alakba írható (talán $-15°$ a szöge), de számológép nélkül ez a megoldás nem túl valószínű :c) $\Big\}$ 2p

$z^5 = 2^5\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ (1p)

$z = 2\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{5}k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{5}k\right)\right)$, ahol $k = 0, 1, \dots, 4$
(1p) (1p) $\Big\}$ 3p

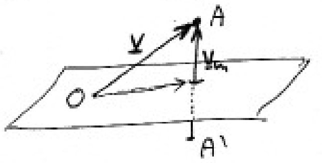
összesen 8p maximum.

(2) e egy irányvektora $(-1, 1, 0) =: \underline{a}$ $\Big\}$ 2p
f egy irányvektora $(3, 1, -2) =: \underline{b}$

$\underline{a}$ és $\underline{b}$ benne van S-ben, tehát $\underline{a}\times\underline{b}$ S egy normálvektora 2p

$\underline{a}\times\underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \underline{i}(-2) + \underline{j}(-2) + \underline{k}(-1-3) = (-2, -2, -4)$ (esetleg $(1,1,2)$-vel számolunk tovább)

S sík egyenlete így $-2x - 2y - 4z = 0$, azaz $x + y + 2z = 0$. 1p



S sík egy egységhosszú normálvektora $\Big\}$ 2p

$\underline{n} = (1, 1, 2)\cdot\frac{1}{|(1,1,2)|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2)$

$\underline{v} := \overrightarrow{OA}$ S-re merőleges komponense $\underline{v}_m = \underline{n}\cdot(\underline{n}\cdot\underline{v}) = \frac{1}{\sqrt{6}}\cdot(1,1,2)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot(2-3+4) =$ $\Big\}$ 2p

$\frac{1}{2}(1, 1, 2)$

$\overrightarrow{OA'} = \underline{v} - 2\underline{v}_m = (2, -3, 2) - (1, 1, 2) = (1, -4, 0)$ Össz. max. 10p 1p

3

Nézzük először az egyes szakaszokat.

Folytonos függvények hányadosa folytonos, kivéve ahol a nevező 0. 1p

$x^2-x-2=(x+1)(x-2)$, ebből a $[0,3]$ intervallumba a 2 esik, ott tehát nem értelmezett a függvény (így nem is folytonos). 2p

$\sin(x-3)$ a $[3,4]$ intervallumban sehol sem 0 1p

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+5x^2-2x-24}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+7x+12)}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+7x+12}{x+1}=10$$ 3p

(esetleg a polinomosztás ennél részletesebben) $\Rightarrow$ folytonossá tehető 2-ben.

Az illesztésnél:

$$f(3)=\frac{27+45-6-24}{9-3-2}=\frac{42}{4}=\frac{21}{2}$$ 1p

$$\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{\sin(32(x-3))}{\sin(x-3)}\cdot\frac{1}{\cos(x-3)}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\sin(32(x-3))}{32(x-3)}\cdot\frac{x-3}{\sin(x-3)}\cdot 32\cdot\frac{1}{\cos(x-3)}=$$

$=32$ $\rightarrow$ itt nem folytonos (és persze nem is tehető azzá) 2p

össz. max 10p