Matematika A1b **Harmadik gyakorlat** **2010. szeptember 20-24.**

1. Mely $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorpárokra teljesül:

$$(a)\ |\mathbf{b}|\mathbf{a} - |\mathbf{a}|\mathbf{b} = \mathbf{0};\ (b)\ |\mathbf{b}|\mathbf{a} + |\mathbf{a}|\mathbf{b} = \mathbf{0};\ (c)\ |\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|.$$

2. Legyen $A_1A_2A_3A_4$ egy téglatest alaplapja, $B_1B_2B_3B_4$ a fedőlapja. Fejezzük ki az $\overrightarrow{A_4B_2}$,$\overrightarrow{B_1B_3}$, $\overrightarrow{A_1B_4}$ vektorok mindegyikét az $\mathbf{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{A_1A_3}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{A_1B_3}$ vektorok lineáris kombinációjaként.

3. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok lineárisan függetlenek. Döntsük el, hogy lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorrendszerek:

$$(a)\ \mathbf{a},\ \mathbf{a}+\mathbf{b},\ \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c};\ (b)\ \mathbf{a}+\mathbf{b},\ \mathbf{b}+\mathbf{c},\ \mathbf{c}+\mathbf{a}(c)\ \mathbf{a}-\mathbf{b},\ \mathbf{b}-\mathbf{c},\ \mathbf{c}-\mathbf{a}.$$

4. Tudjuk, hogy az $\mathbf{a}+2\mathbf{b}+3\mathbf{c}$, $4\mathbf{a}+5\mathbf{b}+6\mathbf{c}$, $7\mathbf{a}+8\mathbf{b}+9\mathbf{c}$ vektorok lineárisan összefüggők. Következik-e ebből, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok is azok?

5. Számítsa ki az $\mathbf{ab}$ skalárszorzatot a következő esetekben:

$$(a)\ |\mathbf{a}| = 2,\ |\mathbf{b}| = 3,\ \alpha = 30^o;\ (b)\ |\mathbf{a}| = 1,\ |\mathbf{b}| = 4,\ \alpha = 60^o;(c)\ |\mathbf{a}| = 9,\ |\mathbf{b}| = 12,\ \alpha = 90^o.$$

6. Tudjuk, hogy $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, $\mathbf{a}+\mathbf{c} \perp \mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b} \perp \mathbf{c}$. Mi lehet a $\mathbf{c}$?

7. Adott $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén mely $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorpárokra teljesül, hogy $\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$ és $\mathbf{a}-\lambda\mathbf{b} \perp \mathbf{b}$

8. Bizonyítsa be, hogy egy paralelogramma két átlója hosszának négyzetösszege megegyezik a négy oldalhosszának négyzetösszegével.

9. Határozzuk meg az $\mathbf{a} = \mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ vektorok által páronként bezárt szögeket.

10. Tekintsük az alábbi $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ bázisban megadott vektorokat: $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$

    Számítsa ki az alábbiakat: $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}$, $(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\mathbf{b}$.

11. Helyvektorok segítségével igazoljuk, hogy egy négyszög szemközti oldalfelezőpontjait, és az átlók felezőpontjait összekötő szakaszoknak van közös pontja.