Egyenes és sík

Wettl Ferenc

2010. szeptember 24.

Definíció

Az adott P_0 ponton áthaladó e egyenes irányvektorának nevezünk minden olyan $\mathbf{v}$ ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$) vektort, amely párhuzamos az e egyenessel.

Definíció

Az adott P_0 ponton áthaladó e egyenes irányvektorának nevezünk minden olyan $\mathbf{v}$ ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$) vektort, amely párhuzamos az e egyenessel.

Tétel (Egyenes explicit vektoregyenlete)

A $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton áthaladó, $\mathbf{v}$ irányvektorú e egyenes vektoregyenlete

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad -\infty < t < \infty,$$

Definíció

Az adott P_0 ponton áthaladó e egyenes irányvektorának nevezünk minden olyan $\mathbf{v}$ ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$) vektort, amely párhuzamos az e egyenessel.

Tétel (Egyenes explicit vektoregyenlete)

A $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton áthaladó, $\mathbf{v}$ irányvektorú e egyenes vektoregyenlete

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad -\infty < t < \infty,$$

ahol $\mathbf{r}$ az e egyenes egy $P(x, y, z)$ pontjának helyvektora,

Definíció

Az adott P_0 ponton áthaladó e egyenes irányvektorának nevezünk minden olyan $\mathbf{v}$ ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$) vektort, amely párhuzamos az e egyenessel.

Tétel (Egyenes explicit vektoregyenlete)

A $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton áthaladó, $\mathbf{v}$ irányvektorú e egyenes vektoregyenlete

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad -\infty < t < \infty,$$

ahol $\mathbf{r}$ az e egyenes egy $P(x, y, z)$ pontjának helyvektora, míg $\mathbf{r}_0$ a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponté.

Definíció

Az adott P_0 ponton áthaladó e egyenes irányvektorának nevezünk minden olyan $\mathbf{v}$ ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$) vektort, amely párhuzamos az e egyenessel.

Tétel (Egyenes explicit vektoregyenlete)

A $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton áthaladó, $\mathbf{v}$ irányvektorú e egyenes vektoregyenlete

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad -\infty < t < \infty,$$

ahol $\mathbf{r}$ az e egyenes egy $P(x, y, z)$ pontjának helyvektora, míg $\mathbf{r}_0$ a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponté.

Megjegyzés

A fenti egyenlet vektorait koordinátás alakba írva:

Definíció

Az adott P_0 ponton áthaladó e egyenes irányvektorának nevezünk minden olyan $\mathbf{v}$ ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$) vektort, amely párhuzamos az e egyenessel.

Tétel (Egyenes explicit vektoregyenlete)

A $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton áthaladó, $\mathbf{v}$ irányvektorú e egyenes vektoregyenlete

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad -\infty < t < \infty,$$

ahol $\mathbf{r}$ az e egyenes egy $P(x, y, z)$ pontjának helyvektora, míg $\mathbf{r}_0$ a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponté.

Megjegyzés

A fenti egyenlet vektorait koordinátás alakba írva:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct).$$

Tétel (Egyenes explicit (paraméteres) egyenletrendszere)

Ha a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pont egy egyenes egyik pontja, irányvektora pedig $\mathbf{v} = (a, b, c)$, akkor az egyenes explicit egyenletrendszere

Tétel (Egyenes explicit (paraméteres) egyenletrendszere)

Ha a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pont egy egyenes egyik pontja, irányvektora pedig $\mathbf{v} = (a, b, c)$, akkor az egyenes explicit egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned}$$

ahol a t paraméter az összes valós számon végigfut.

Példa (Egy ponton átmenő, adott vektorral párhuzamos egyenes)

Legyen $P_0(2, -1, 3)$, $\mathbf{v} = (4, 3, 0)$.

Példa (Egy ponton átmenő, adott vektorral párhuzamos egyenes)

Legyen $P_0(2, -1, 3)$, $\mathbf{v} = (4, 3, 0)$.

Megoldás

$x = 2 + 4t,$

Példa (Egy ponton átmenő, adott vektorral párhuzamos egyenes)

Legyen $P_0(2, -1, 3)$, $\mathbf{v} = (4, 3, 0)$.

Megoldás

$x = 2 + 4t,\;\; y = -1 + 3t,$

Példa (Egy ponton átmenő, adott vektorral párhuzamos egyenes)

Legyen $P_0(2,-1,3)$, $\mathbf{v}=(4,3,0)$.

Megoldás

$x=2+4t,\ y=-1+3t,\ z=3.$

Példa (Egy ponton átmenő, adott vektorral párhuzamos egyenes)

Legyen $P_0(2, -1, 3)$, $\mathbf{v} = (4, 3, 0)$.

Megoldás

$x = 2 + 4t,\ \ y = -1 + 3t,\ \ z = 3.$

Példa (Két ponton átmenő egyenes)

Legyen $P_0(2, -1, 3)$, $P_1(6, 2, 3)$.

Példa (Egy ponton átmenő, adott vektorral párhuzamos egyenes)

Legyen $P_0(2, -1, 3)$, $\mathbf{v} = (4, 3, 0)$.

Megoldás

$x = 2 + 4t, \; y = -1 + 3t, \; z = 3.$

Példa (Két ponton átmenő egyenes)

Legyen $P_0(2, -1, 3)$, $P_1(6, 2, 3)$.

Megoldás

$\overrightarrow{P_0P_1} = (4, 3, 0).$

Példa (Egy ponton átmenő, adott vektorral párhuzamos egyenes)

Legyen $P_0(2, -1, 3)$, $\mathbf{v} = (4, 3, 0)$.

Megoldás

$x = 2 + 4t,\; y = -1 + 3t,\; z = 3.$

Példa (Két ponton átmenő egyenes)

Legyen $P_0(2, -1, 3)$, $P_1(6, 2, 3)$.

Megoldás

$\overrightarrow{P_0P_1} = (4, 3, 0)$.
$x = 2 + 4t,$

Példa (Egy ponton átmenő, adott vektorral párhuzamos egyenes)

Legyen $P_0(2, -1, 3)$, $\mathbf{v} = (4, 3, 0)$.

Megoldás

$x = 2 + 4t, \ y = -1 + 3t, \ z = 3.$

Példa (Két ponton átmenő egyenes)

Legyen $P_0(2, -1, 3)$, $P_1(6, 2, 3)$.

Megoldás

$\overrightarrow{P_0P_1} = (4, 3, 0).$

$x = 2 + 4t, \ y = -1 + 3t,$

Példa (Egy ponton átmenő, adott vektorral párhuzamos egyenes)

Legyen $P_0(2,-1,3)$, $\mathbf{v}=(4,3,0)$.

Megoldás

$x=2+4t,\ y=-1+3t,\ z=3.$

Példa (Két ponton átmenő egyenes)

Legyen $P_0(2,-1,3)$, $P_1(6,2,3)$.

Megoldás

$\overrightarrow{P_0P_1}=(4,3,0).$
$x=2+4t,\ y=-1+3t,\ z=3.$

Példa (Szakasz paraméterezése)

Paraméterezzük a $P_0(2, -1, 3)$, $P_1(6, 2, 3)$ pontokat összekötő szakasz pontjait.

Megoldás

Az előző példa szerint az egyenes egyenletrendszere:
$x = 2 + 4t,\ y = -1 + 3t,\ z = 3.$

Példa (Szakasz paraméterezése)

Paraméterezzük a $P_0(2,-1,3)$, $P_1(6,2,3)$ pontokat összekötő szakasz pontjait.

Megoldás

Az előző példa szerint az egyenes egyenletrendszere:
$x = 2+4t,\ y = -1+3t,\ z = 3$. A t paraméterű pontot jelölhetjük P_t-vel, hisz a $P_t(x,y,z) = (2+4t, -1+3t, 3)$ jelöléssel

Példa (Szakasz paraméterezése)

Paraméterezzük a $P_0(2, -1, 3)$, $P_1(6, 2, 3)$ pontokat összekötő szakasz pontjait.

Megoldás

Az előző példa szerint az egyenes egyenletrendszere:
$x = 2 + 4t,\ y = -1 + 3t,\ z = 3$. A t paraméterű pontot jelölhetjük P_t-vel, hisz a $P_t(x, y, z) = (2 + 4t, -1 + 3t, 3)$ jelöléssel $t = 0$ esetén épp a P_0, $t = 1$ esetén épp a P_1 pontot kapjuk.

Példa (Szakasz paraméterezése)

Paraméterezzük a $P_0(2, -1, 3)$, $P_1(6, 2, 3)$ pontokat összekötő szakasz pontjait.

Megoldás

Az előző példa szerint az egyenes egyenletrendszere:
$x = 2 + 4t,\ y = -1 + 3t,\ z = 3$. A t paraméterű pontot jelölhetjük P_t-vel, hisz a $P_t(x, y, z) = (2 + 4t, -1 + 3t, 3)$ jelöléssel $t = 0$ esetén épp a P_0, $t = 1$ esetén épp a P_1 pontot kapjuk. Így a $\overline{P_0P_1}$ szakasz paraméterezése:

Példa (Szakasz paraméterezése)

Paraméterezzük a $P_0(2,-1,3)$, $P_1(6,2,3)$ pontokat összekötő szakasz pontjait.

Megoldás

Az előző példa szerint az egyenes egyenletrendszere:
$x = 2+4t,\ y = -1+3t,\ z = 3$. A t paraméterű pontot jelölhetjük P_t-vel, hisz a $P_t(x,y,z) = (2+4t,-1+3t,3)$ jelöléssel $t = 0$ esetén épp a P_0, $t = 1$ esetén épp a P_1 pontot kapjuk. Így a $\overline{P_0P_1}$ szakasz paraméterezése:
$x = 2+4t,\ y = -1+3t,\ z = 3,$

Példa (Szakasz paraméterezése)

Paraméterezzük a $P_0(2,-1,3)$, $P_1(6,2,3)$ pontokat összekötő szakasz pontjait.

Megoldás

Az előző példa szerint az egyenes egyenletrendszere:
$x = 2+4t,\ y = -1+3t,\ z = 3$. A t paraméterű pontot jelölhetjük P_t-vel, hisz a $P_t(x,y,z) = (2+4t, -1+3t, 3)$ jelöléssel $t = 0$ esetén épp a P_0, $t = 1$ esetén épp a P_1 pontot kapjuk. Így a $\overline{P_0P_1}$ szakasz paraméterezése:
$x = 2+4t,\ y = -1+3t,\ z = 3,\ 0 \le t \le 1$.

Példa (Egyenes mentén egyenletesen mozgó pont mozgásának leírása)

A $P_0(2,-1,3)$ pontból 10 távolságegység/időegység sebességgel az $\mathbf{v}=(4,3,0)$ irányban haladva, hová jutunk 6 időegység alatt?

Példa (Egyenes mentén egyenletesen mozgó pont mozgásának leírása)

A $P_0(2, -1, 3)$ pontból 10 távolságegység/időegység sebességgel az $\mathbf{v} = (4, 3, 0)$ irányban haladva, hová jutunk 6 időegység alatt?

Megoldás

Átírva a vektoregyenletet, annak fizikai értelmezés adható:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\,|\mathbf{v}|\,\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} =$$

Példa (Egyenes mentén egyenletesen mozgó pont mozgásának leírása)

A $P_0(2, -1, 3)$ pontból 10 távolságegység/időegység sebességgel az $\mathbf{v} = (4, 3, 0)$ irányban haladva, hová jutunk 6 időegység alatt?

Megoldás

Átírva a vektoregyenletet, annak fizikai értelmezés adható:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\,|\mathbf{v}|\,\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \mathbf{r}_0 + t(\text{sebesség})(\text{mozgásirányú egységvektor}).$$

Példa (Egyenes mentén egyenletesen mozgó pont mozgásának leírása)

A $P_0(2, -1, 3)$ pontból 10 távolságegység/időegység sebességgel az $\mathbf{v} = (4, 3, 0)$ irányban haladva, hová jutunk 6 időegység alatt?

Megoldás

Átírva a vektoregyenletet, annak fizikai értelmezés adható:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\,|\mathbf{v}|\,\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \mathbf{r}_0 + t(\text{sebesség})(\text{mozgásirányú egységvektor}).$$

Most a sebesség $= 10$,

Példa (Egyenes mentén egyenletesen mozgó pont mozgásának leírása)

A $P_0(2,-1,3)$ pontból 10 távolságegység/időegység sebességgel az $\mathbf{v}=(4,3,0)$ irányban haladva, hová jutunk 6 időegység alatt?

Megoldás

Átírva a vektoregyenletet, annak fizikai értelmezés adható:

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_0+t\,|\mathbf{v}|\,\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=\mathbf{r}_0+t(\text{sebesség})(\text{mozgásirányú egységvektor}).$$

Most a sebesség $=10$, egységvektor $=(4/5,3/5,0)$, hisz $|\mathbf{v}|=5$.

Példa (Egyenes mentén egyenletesen mozgó pont mozgásának leírása)

A $P_0(2,-1,3)$ pontból 10 távolságegység/időegység sebességgel az $\mathbf{v}=(4,3,0)$ irányban haladva, hová jutunk 6 időegység alatt?

Megoldás

Átírva a vektoregyenletet, annak fizikai értelmezés adható:

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_0+t\,|\mathbf{v}|\,\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}=\mathbf{r}_0+t(\text{sebesség})(\text{mozgásirányú egységvektor}).$$

Most a sebesség $=10$, egységvektor $=(4/5,3/5,0)$, hisz $|\mathbf{v}|=5$.

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t)&=\mathbf{r}_0+t(\text{sebesség})(\text{mozgásirányú egységvektor})\\&=(2,-1,3)+6\cdot 10\cdot(4/5,3/5,0)=(50,35,3).\end{aligned}$$

Példa (Egyenes mentén egyenletesen mozgó pont mozgásának leírása)

A $P_0(2, -1, 3)$ pontból 10 távolságegység/időegység sebességgel az $\mathbf{v} = (4, 3, 0)$ irányban haladva, hová jutunk 6 időegység alatt?

Megoldás

Átírva a vektoregyenletet, annak fizikai értelmezés adható:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\,|\mathbf{v}|\,\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \mathbf{r}_0 + t(\text{sebesség})(\text{mozgásirányú egységvektor}).$$

Most a sebesség $= 10$, egységvektor $= (4/5, 3/5, 0)$, hisz $|\mathbf{v}| = 5$.

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + t(\text{sebesség})(\text{mozgásirányú egységvektor})\\ &= (2, -1, 3) + 6 \cdot 10 \cdot (4/5, 3/5, 0) = (50, 35, 3).\end{aligned}$$

(E példában $\mathbf{v}$ nem a sebességvektor, hisz hossza nem 10, a sebességnek csak az irányát mutatja.)

Tétel (Egyenes és pont távolsága)

A Q pont és a P ponton átmenő $\mathbf{v}$ irányvektorú egyenes távolsága:

Tétel (Egyenes és pont távolsága)

A Q pont és a P ponton átmenő $\mathbf{v}$ irányvektorú egyenes távolsága:

$$\frac{|\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$$

Példa

Mennyi a $Q(-3, 4, -3)$ pont és az $e: \ x = 1 - 4t, \ y = 2, \ z = 3t$ egyenes távolsága?

Példa

Mennyi a $Q(-3,4,-3)$ pont és az $e:\;\; x=1-4t,\;\; y=2,\;\; z=3t$ egyenes távolsága?

Megoldás

$P(1,2,0)$,

Példa

Mennyi a $Q(-3, 4, -3)$ pont és az $e: \; x = 1 - 4t, \; y = 2, \; z = 3t$ egyenes távolsága?

Megoldás

$P(1, 2, 0)$, $\overrightarrow{PQ} = (-3 - 1, 4 - 2, -3 - 0) = (-4, 2, -3)$,

Példa

Mennyi a $Q(-3, 4, -3)$ pont és az $e: \; x = 1 - 4t, \; y = 2, \; z = 3t$ egyenes távolsága?

Megoldás

$P(1, 2, 0)$, $\overrightarrow{PQ} = (-3 - 1, 4 - 2, -3 - 0) = (-4, 2, -3)$,

$$\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 2 & -4 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (6, 24, 8)$$

Példa

Mennyi a $Q(-3, 4, -3)$ pont és az $e: \ x = 1 - 4t, \ y = 2, \ z = 3t$ egyenes távolsága?

Megoldás

$P(1, 2, 0)$, $\overrightarrow{PQ} = (-3 - 1, 4 - 2, -3 - 0) = (-4, 2, -3)$,

$$\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 2 & -4 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (6, 24, 8)$$

$|(6, 24, 8)| = 26$, így

Példa

Mennyi a $Q(-3,4,-3)$ pont és az $e: \ x = 1-4t, \ y = 2, \ z = 3t$ egyenes távolsága?

Megoldás

$P(1,2,0)$, $\overrightarrow{PQ} = (-3-1, 4-2, -3-0) = (-4,2,-3)$,

$$\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 2 & -4 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (6,24,8)$$

$|(6,24,8)| = 26$, így

$$\frac{|\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{|(6,24,8)|}{|(-4,0,3)|} = \frac{26}{5}.$$

Definíció

Egy $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ vektort az S sík normálvektorának nevezzük, ha merőleges rá.

Definíció

Egy $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ vektort az S sík normálvektorának nevezzük, ha merőleges rá.

Tétel (Sík explicit egyenletei)

A $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton áthaladó ($\mathbf{r}_0$ helyvektorú), az $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektorok által kifeszített sík

Definíció

Egy $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ vektort az S sík normálvektorának nevezzük, ha merőleges rá.

Tétel (Sík explicit egyenletei)

A $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton áthaladó ($\mathbf{r}_0$ helyvektorú), az $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektorok által kifeszített sík
explicit vektoregyenlete: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}.$

Definíció

Egy $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ vektort az S sík normálvektorának nevezzük, ha merőleges rá.

Tétel (Sík explicit egyenletei)

A $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton áthaladó ($\mathbf{r}_0$ helyvektorú), az $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektorok által kifeszített sík

explicit vektoregyenlete: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$.

explicit egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + su_1 + tv_1 \\ y &= y_0 + su_2 + tv_2 \\ z &= z_0 + su_3 + tv_3 \end{aligned}$$

Tétel (Sík implicit egyenletei)

A $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton áthaladó, $\mathbf{n} = (A, B, C)$ $(\mathbf{n} \neq \mathbf{0})$ normálvektorú sík

Tétel (Sík implicit egyenletei)

A $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton áthaladó, $\mathbf{n} = (A, B, C)$ $(\mathbf{n} \neq \mathbf{0})$ normálvektorú sík vektoregyenlete:

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0,$$

Tétel (Sík implicit egyenletei)

A $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton áthaladó, $\mathbf{n} = (A, B, C)$ ($\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$) normálvektorú sík

vektoregyenlete: $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0 P} = 0,$

alapegyenlete: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$

Tétel (Sík implicit egyenletei)

A $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton áthaladó, $\mathbf{n} = (A, B, C)$ ($\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$) normálvektorú sík

vektoregyenlete: $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0,$

alapegyenlete: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$

általános egyenlete: $Ax + By + Cz = D,$

Tétel (Sík implicit egyenletei)

A $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton áthaladó, $\mathbf{n} = (A, B, C)$ ($\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$) normálvektorú sík

vektoregyenlete: $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0,$

alapegyenlete: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$

általános egyenlete: $Ax + By + Cz = D,$

normálegyenlete: $\dfrac{Ax + By + Cz - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0,$

Tétel (Sík implicit egyenletei)

A $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton áthaladó, $\mathbf{n} = (A, B, C)$ ($\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$) normálvektorú sík

vektoregyenlete: $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0,$

alapegyenlete: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$

általános egyenlete: $Ax + By + Cz = D,$

normálegyenlete: $\dfrac{Ax + By + Cz - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0,$

ahol $P(x, y, z)$ a sík egy tetszőleges pontja, és $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$.

Tétel (Sík implicit egyenletei)

A $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton áthaladó, $\mathbf{n} = (A, B, C)$ ($\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$) normálvektorú sík

vektoregyenlete: $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0,$

alapegyenlete: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$

általános egyenlete: $Ax + By + Cz = D,$

normálegyenlete: $\dfrac{Ax + By + Cz - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0,$

ahol $P(x, y, z)$ a sík egy tetszőleges pontja, és $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$.
Normálegyenlet esetén a normálvektor egységvektor.

Példa (Sík egyenletének felírása)

$P_0(1, -2, 3)$, $\mathbf{u} = (3, 0, 2)$, $\mathbf{v} = (1, -3, 0)$.

Példa (Sík egyenletének felírása)

$P_0(1, -2, 3)$, $\mathbf{u} = (3, 0, 2)$, $\mathbf{v} = (1, -3, 0)$.

Megoldás

Explicit egyenlet és egyenletrendszer:

Példa (Sík egyenletének felírása)

$P_0(1, -2, 3)$, $\mathbf{u} = (3, 0, 2)$, $\mathbf{v} = (1, -3, 0)$.

Megoldás

Explicit egyenlet és egyenletrendszer:

$(x, y, z) = (1, -2, 3) + s(3, 0, 2) + t(1, -3, 0)$

Példa (Sík egyenletének felírása)

$P_0(1, -2, 3)$, $\mathbf{u} = (3, 0, 2)$, $\mathbf{v} = (1, -3, 0)$.

Megoldás

Explicit egyenlet és egyenletrendszer:

$(x, y, z) = (1, -2, 3) + s(3, 0, 2) + t(1, -3, 0)$

$x = 1 + 3s + t$

$y = -2 - 3t$

$z = 3 + 2s$

Példa (Sík egyenletének felírása)

$P_0(1,-2,3)$, $\mathbf{u}=(3,0,2)$, $\mathbf{v}=(1,-3,0)$.

Megoldás

Explicit egyenlet és egyenletrendszer:

$$(x,y,z)=(1,-2,3)+s(3,0,2)+t(1,-3,0)$$

$$x=1+3s+t$$

$$y=-2-3t$$

$$z=3+2s$$

$$\mathbf{n}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 3 & 0 & 2\\ 1 & -3 & 0\end{vmatrix}=(6,2,-9).$$

Példa (Sík egyenletének felírása)

$P_0(1,-2,3)$, $\mathbf{u}=(3,0,2)$, $\mathbf{v}=(1,-3,0)$.

Megoldás

Explicit egyenlet és egyenletrendszer:

$(x,y,z)=(1,-2,3)+s(3,0,2)+t(1,-3,0)$

$x=1+3s+t$

$y=-2-3t$

$z=3+2s$

$$\mathbf{n}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 3 & 0 & 2\\ 1 & -3 & 0\end{vmatrix}=(6,2,-9).$$

vektoregyenlet: $(6,2,-9)\cdot(x-1,y+2,z-3)=0,$

Példa (Sík egyenletének felírása)

$P_0(1,-2,3)$, $\mathbf{u}=(3,0,2)$, $\mathbf{v}=(1,-3,0)$.

Megoldás

Explicit egyenlet és egyenletrendszer:

$$(x,y,z)=(1,-2,3)+s(3,0,2)+t(1,-3,0)$$

$$x=1+3s+t$$

$$y=-2-3t$$

$$z=3+2s$$

$$\mathbf{n}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 3 & 0 & 2\\ 1 & -3 & 0\end{vmatrix}=(6,2,-9).$$

vektoregyenlet: $(6,2,-9)\cdot(x-1,y+2,z-3)=0,$

alapegyenlet: $6(x-1)+2(y+2)-9(z-3)=0,$

Példa (Sík egyenletének felírása)

$P_0(1, -2, 3)$, $\mathbf{u} = (3, 0, 2)$, $\mathbf{v} = (1, -3, 0)$.

Megoldás

Explicit egyenlet és egyenletrendszer:

$(x, y, z) = (1, -2, 3) + s(3, 0, 2) + t(1, -3, 0)$

$x = 1 + 3s + t$

$y = -2 - 3t$

$z = 3 + 2s$

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (6, 2, -9).$$

vektoregyenlet: $(6, 2, -9) \cdot (x - 1, y + 2, z - 3) = 0,$

alapegyenlet: $6(x - 1) + 2(y + 2) - 9(z - 3) = 0,$

általános egyenlet: $6x + 2y - 9z = -25,$

Példa (Sík egyenletének felírása)

$P_0(1,-2,3)$, $\mathbf{u}=(3,0,2)$, $\mathbf{v}=(1,-3,0)$.

Megoldás

Explicit egyenlet és egyenletrendszer:

$$(x,y,z)=(1,-2,3)+s(3,0,2)+t(1,-3,0)$$

$$x=1+3s+t$$

$$y=-2-3t$$

$$z=3+2s$$

$$\mathbf{n}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 3 & 0 & 2\\ 1 & -3 & 0\end{vmatrix}=(6,2,-9).$$

vektoregyenlet: $(6,2,-9)\cdot(x-1,y+2,z-3)=0,$

alapegyenlet: $6(x-1)+2(y+2)-9(z-3)=0,$

általános egyenlet: $6x+2y-9z=-25,$

normálegyenlet: $\frac{6x+2y-9z+25}{\sqrt{6^2+2^2+9^2}}=\frac{6}{11}x+\frac{2}{11}y-\frac{9}{11}z+\frac{25}{11}=0.$

Példa (Három ponton átmenő sík egyenlete)

$P(1,0,0)$, $Q(0,2,0)$, $R(0,0,3)$.

Példa (Három ponton átmenő sík egyenlete)

$P(1,0,0)$, $Q(0,2,0)$, $R(0,0,3)$.

Megoldás

A normálvektor

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (6,3,2),$$

Példa (Három ponton átmenő sík egyenlete)

$P(1,0,0)$, $Q(0,2,0)$, $R(0,0,3)$.

Megoldás

A normálvektor

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (6,3,2),$$

így az alapegyenlet $6(x-1)+3(y-0)+2(z-0)=0$,

Példa (Három ponton átmenő sík egyenlete)

$P(1,0,0)$, $Q(0,2,0)$, $R(0,0,3)$.

Megoldás

A normálvektor

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (6,3,2),$$

így az alapegyenlet $6(x-1)+3(y-0)+2(z-0)=0$, az általános egyenlet $6x+3y+2z=6$,

Példa (Három ponton átmenő sík egyenlete)

$P(1,0,0)$, $Q(0,2,0)$, $R(0,0,3)$.

Megoldás

A normálvektor

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (6,3,2),$$

így az alapegyenlet $6(x-1)+3(y-0)+2(z-0)=0$, az általános egyenlet $6x+3y+2z=6$, a normálegyenlet $\frac{6}{7}x+\frac{3}{7}y+\frac{2}{7}z-\frac{6}{7}=0$.

Példa (Két sík metszésvonalának egyenletrendszere)

S_1: $2x + z = 3$, S_2: $3y + z = 5$

Példa (Két sík metszésvonalának egyenletrendszere)

S_1: $2x + z = 3$, S_2: $3y + z = 5$

Megoldás

S_1 normálvektora: $(2, 0, 1)$,

Példa (Két sík metszésvonalának egyenletrendszere)

S_1: $2x + z = 3$, S_2: $3y + z = 5$

Megoldás

S_1 normálvektora: $(2, 0, 1)$,
S_2 normálvektora: $(0, 3, 1)$,

Példa (Két sík metszésvonalának egyenletrendszere)

S_1: $2x + z = 3$, S_2: $3y + z = 5$

Megoldás

S_1 normálvektora: $(2, 0, 1)$,
S_2 normálvektora: $(0, 3, 1)$,

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-3, -2, 6),$$

Példa (Két sík metszésvonalának egyenletrendszere)

S_1: $2x + z = 3$, S_2: $3y + z = 5$

Megoldás

S_1 normálvektora: $(2, 0, 1)$,
S_2 normálvektora: $(0, 3, 1)$,

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-3, -2, 6),$$

Kell keresni még egy közös pontot, azaz a két egyenletből álló egyenletrendszer egy megoldását, ami biztosan létezik, ha a két sík nem párhuzamos.

Példa (Két sík metszésvonalának egyenletrendszere)

S_1: $2x + z = 3$, S_2: $3y + z = 5$

Megoldás

S_1 normálvektora: $(2, 0, 1)$,
S_2 normálvektora: $(0, 3, 1)$,

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-3, -2, 6),$$

Kell keresni még egy közös pontot, azaz a két egyenletből álló egyenletrendszer egy megoldását, ami biztosan létezik, ha a két sík nem párhuzamos. Legyen például $x = -1$, ekkor $z = 5$ és $y = 0$.

Példa (Két sík metszésvonalának egyenletrendszere)

S_1: $2x + z = 3$, S_2: $3y + z = 5$

Megoldás

S_1 normálvektora: $(2, 0, 1)$,
S_2 normálvektora: $(0, 3, 1)$,

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-3, -2, 6),$$

Kell keresni még egy közös pontot, azaz a két egyenletből álló egyenletrendszer egy megoldását, ami biztosan létezik, ha a két sík nem párhuzamos. Legyen például $x = -1$, ekkor $z = 5$ és $y = 0$. Az egyenes egyenletrendszere: $x = -1 - 3t$, $y = -2t$, $z = 5 + 6t$.

Példa (Sík és egyenes metszéspontja)

S: $x + 2y + 2z = 3$, e: $x = 3 - t,\; y = 2 + 2t,\; z = 1$.

Példa (Sík és egyenes metszéspontja)

S: $x + 2y + 2z = 3$, e: $x = 3 - t,\ y = 2 + 2t,\ z = 1$.

Megoldás

Behelyettesítjük az egyenes egy pontjának koordinátáit a sík egyenletébe.

Példa (Sík és egyenes metszéspontja)

S: $x + 2y + 2z = 3$, e: $x = 3 - t,\ y = 2 + 2t,\ z = 1.$

Megoldás

Behelyettesítjük az egyenes egy pontjának koordinátáit a sík egyenletébe.
Az egyenes egy pontja: $(3 - t, 2 + 2t, 1)$,

Példa (Sík és egyenes metszéspontja)

S: $x + 2y + 2z = 3$, e: $x = 3 - t,\ y = 2 + 2t,\ z = 1$.

Megoldás

Behelyettesítjük az egyenes egy pontjának koordinátáit a sík egyenletébe.
Az egyenes egy pontja: $(3 - t, 2 + 2t, 1)$, behelyettesítve:
$(3 - t) + 2(2 + 2t) + 2 \cdot 1 = 3$, azaz $t = -2$.

Példa (Sík és egyenes metszéspontja)

S: $x + 2y + 2z = 3$, e: $x = 3 - t,\ y = 2 + 2t,\ z = 1$.

Megoldás

Behelyettesítjük az egyenes egy pontjának koordinátáit a sík egyenletébe. Az egyenes egy pontja: $(3 - t, 2 + 2t, 1)$, behelyettesítve: $(3 - t) + 2(2 + 2t) + 2 \cdot 1 = 3$, azaz $t = -2$. Innen a közös pont: $(5, -2, 1)$.

Példa (Sík és egyenes metszéspontja)

S: $x + 2y + 2z = 3$, e: $x = 3 - t$, $y = 2 + 2t$, $z = 1$.

Megoldás

Behelyettesítjük az egyenes egy pontjának koordinátáit a sík egyenletébe.
Az egyenes egy pontja: $(3 - t, 2 + 2t, 1)$, behelyettesítve:
$(3 - t) + 2(2 + 2t) + 2 \cdot 1 = 3$, azaz $t = -2$. Innen a közös pont:
$(5, -2, 1)$. Ellenőrzés!

Példa (Pont és sík távolsága)

$Q(0,-1,1)$, S: $x+2y+2z=3$ (normálegyenlete: $\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-1=0$).

Példa (Pont és sík távolsága)

$Q(0,-1,1)$, S: $x+2y+2z=3$ (normálegyenlete: $\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-1=0$).

Megoldás

Legyen P az S sík egy tetszőleges pontja, ekkor Q és S távolsága:

$$\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}\right|$$

Példa (Pont és sík távolsága)

$Q(0,-1,1)$, S: $x+2y+2z=3$ (normálegyenlete: $\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-1=0$).

Megoldás

Legyen P az S sík egy tetszőleges pontja, ekkor Q és S távolsága:

$$\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}\right|$$

ahol $\mathbf{n}$ az S sík egy normálvektora.

Példa (Pont és sík távolsága)

$Q(0,-1,1)$, S: $x+2y+2z=3$ (normálegyenlete: $\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-1=0$).

Megoldás

Legyen P az S sík egy tetszőleges pontja, ekkor Q és S távolsága:

$$\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}\right|$$

ahol $\mathbf{n}$ az S sík egy normálvektora. Esetünkben legyen $P(-1,1,1)$. Így

$$\left|(1,-2,0)\cdot\frac{(1,2,2)}{3}\right| = |-1| = 1.$$

Példa (Pont és sík távolsága)

$Q(0,-1,1)$, S: $x+2y+2z=3$ (normálegyenlete: $\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-1=0$).

Megoldás

Legyen P az S sík egy tetszőleges pontja, ekkor Q és S távolsága:

$$\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}\right|$$

ahol $\mathbf{n}$ az S sík egy normálvektora. Esetünkben legyen $P(-1,1,1)$. Így

$$\left|(1,-2,0)\cdot\frac{(1,2,2)}{3}\right| = |-1| = 1.$$

A feladat mindig megoldható úgy, hogy a Q pont koordinátáit behelyettesítjük a sík normálegyenletének bal oldalába. A kapott érték épp a távolság. (Az előjel azt jelzi, hogy a pont a sík melyik oldalán van.)
$\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{2}{3}\cdot(-1)+\frac{2}{3}\cdot 1-1=-1.$