# Komplex számok

Wettl Ferenc

2010-09-10

- pozitív egészek – összeadás, szorzás
- $a + x = b$ megoldhatósága $\longrightarrow$ negatív számok és 0
- $ax = b$ megoldhatósága $\longrightarrow$ racionális számok
- $x^2 = 2$ megoldása $\longrightarrow$ vannak nem racionális számok is
- sorozatok határértékének fogalma $\longrightarrow$ irracionális számok
- racionális + irracionális számok $\longrightarrow$ valós számok
- és mi van az $x^2 = -1$ egyenlet megoldhatóságával? Szükség van további bővítésre?

- Girolamo Cardano (1501–1576) orvos, filozófus, matematikus – 1538 körül értesül arról, hogy Scipione del Ferro és Niccolò Tartaglia egymástól függetlenül felfedezték az $x^3 + px = q$ alakú harmadfokú egyenlet megoldását – 1545-ben megírja „Ars magna sive de regulis algebraicis" című művét, benne a megoldóképlettel – 1552-től kezdődően Európa egyik leghíresebb orvosa – a 60-as évek elején elveszti két fiát (gyilkosságért halál, rablásért száműzetés) – 1570-ben Bolognában bebörtönzik, szabadulása után Rómába költözik
- Scipione del Ferro (1465–1526) felfedezi a harmadfokú egyenlet megoldásának módját – titokban tartja (kivétel Nave, Fiore)
- Niccolò Fontana (1500?–1557) gúnynevén Tartaglia (dadogó) (1511 Brescia, francia dúlás) – 1535: Fiore kihívja Tartagliát egy 15 napos versenyre (30 feladat, a vesztes a győztest és 29 barátját megvendégeli) – felkészüléskor Tartaglia rájön a nehezebb típusú harmadfokú egyenletek megoldásának módjára

- Cardano (kilátásba helyezve Tartaglia tüzérségi találmányainak pártfogót keres, titoktartás igérete mellett megszerzi a titkot) – amikor Navétól megtudja, hogy del Ferro is ismerte e képleteket, felmentve érzi magát, és publikálja (a negyedfokú esetre is továbbfejlesztve az eredményt)
- Tartaglia leírta „megcsalatásának" történetét
- Milánóban Ferrari (Cardano tanítványa) vitára hívja Tartagliát, aki a vitát elveszti, ennek következtében lehetőségeit (nyilvános előadások) elveszíti

Oldjuk meg az $x^3 = bx + c$ egyenletet!
A Tartaglia által talált képlet:

$$x = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}}$$

Oldjuk meg a $x^3 = 7x + 6$ egyenletet!

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\frac{6}{2} + \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{6}{2} - \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{3}\right)^3}} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt[3]{81 + 30\sqrt{-3}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{81 - 30\sqrt{-3}} \\ &= \frac{1}{3}\left(9/2 + 1/2\sqrt{-3}\right) + \frac{1}{3}\left(9/2 - 1/2\sqrt{-3}\right) \\ &= 3 \end{aligned}$$

### Jelölés

$i = \sqrt{-1}$

### Definíció

Az $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ alakú kifejezéseket komplex számoknak nevezzük, ahol $i$ az a szám, melyre $i^2 = -1$. Egy komplex szám több alakba is felírható, ezt az alakot algebrai alaknak nevezzük. A komplex számok halmazát $\mathbb{C}$ jelöli.

Komplex számok ábrázolása, komplex számsík, komplex számgömb.

### Definíció

Az $(a, b)$ vektor $x$-tengellyel bezárt szöge legyen $\varphi$, hossza $r$. Ekkor a $z = a + ib$ komplex szám felírható $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ alakban is, hisz $a = r\cos\varphi$, és $b = r\sin\varphi$. $r$-et a komplex szám abszolút értékének, $\varphi$-t argumentumának nevezzük.

- $z_1 = a_1 + b_1 i = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$,
  $z_2 = a_2 + b_2 i = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$
- algebrai lakban: összeadás, kivonás, szorzás algebrai kifejezésként az $i^2 = -1$ helyettesítést használva; osztás a nevező konjugáltjával való bővítéssel.
  $z_1 \pm z_2 = (a_1 + a_2) \pm (b_1 + b_2)i$,
  $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$,
  $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \dfrac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \dfrac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}$,
- trigonometriai alakban:
  $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$
  $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$
  $\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + \sin\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$, ahol $k = 0, 1, \dots n-1$.

### Tétel (Algebra alaptétele)

Minden komplex-együtthatós $n$-edfokú ($n \geq 1$) polinomnak van komplex gyöke.

### Tétel (Algebra alaptétele – változat)

Minden komplex-együtthatós $n$-edfokú ($n \geq 1$) polinomnak pontosan $n$ gyöke van, ha a gyököket multiplicitással számoljuk. Másként fogalmazva minden komplex-együtthatós polinom lineáris tényezők szorzatára bontható. Nevezetesen az

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,\ a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$$

egyenlethez léteznek olyan $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ számok, hogy

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = a_n (x - c_1)(x - c_2)\dots(x - c_n),$$

és ez a felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.