Tartalomjegyzék

Listák

Tételek, állítások, következmények

Definíciók

Kidolgozott példák

Jelölések

Képlet	**oldal**	**megjegyzés**
$\mathrm{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$	24	$\mathbf{a}$ vektor $\mathbf{b}$-re eső vetülete
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$	21	$\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ skaláris szorzata
$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$	27	$\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektori szorzata
$(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle$	13	$\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ szöge
$(\mathbf{a},\mathbf{b})_\sphericalangle$	26	$\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ irányított szöge
$:=$		definiáló egyenlőség
i, i		imaginárius egység, és az i változó
e, e		az e szám, és az e változó
$\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$		komplex, valós, racionális, illetve egész számok
$\mathbb{Z}_m$	??	modulo m vett maradékosztályok
$\mathbb{F}_p=\mathbb{Z}_p$	??	a modulo p (p prím) vett maradékosztályok, a prímelemű test
$\lvert\mathbf{a}\rvert$	13	az $\mathbf{a}$ vektor abszolút értéke
$\lVert\mathbf{a}\rVert$	13	az $\mathbf{a}$ vektor normája
a_{ij}, $a_{i,j}$	??	az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorának, j-edik oszlopának eleme
$\mathbf{a}_{i*}$	??	az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorvektora
$\mathbf{a}_{*j}$, $\mathbf{a}_j$	??	az $\mathbf{A}$ mátrix j-edik oszlopvektora
$(\mathbf{v})_\mathcal{B}$, $[\mathbf{v}]_\mathcal{B}$	??	a $\mathbf{v}$ vektor $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozó koordinátás alakja
$[L]_\mathcal{B}$		az L lineáris leképezés $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozó mátrixa
A, $\mathbf{A}$		az A lineáris leképezés és annak $\mathbf{A}$ mátrixa a standard bázisban

A jelölések kiválasztásánál azt az elvet követtük, hogy a fontosabb jelölések esetén a nemzetközi angol nyelvű matematikai szakirodalomban elterjedt jelölések valamelyikét követtük. Ez a lebegőpontos számok írására is vonatkozik, tehát nem a magyar irodai szabványt követjük, így nem *tizedesvesszőt*, hanem *tizedespontot* használunk.

I. rész

A lineáris algebra forrásai

A lineáris algebra két fő forrásának egyike a geometria, másika az algebra vidékéről ered. Mindkét forrás jól jellemezhető egy-egy elemi fogalommal: az egyik a vektor, a másik a lineáris egyenletrendszer. E könyv első része e két fogalmat vizsgálja egészen elemi, középiskolai szintről indulva. A lineáris algebra mélyebb fogalmai már itt fölbukkannak, de csak nagyon egyszerű és a legkevésbé absztrakt formájukban. Az első rész végére látni fogjuk, hogy e két forrás már ezen a bevezető szinten szétválaszthatatlanul egyetlen folyammá válik.

Hang gliding @ Pule (CC) on flickr by purplemattfish

1 Vektorok

Általánosan elterjedt nézet szerint a természeti jelenségek leírásakor sok összefüggést számszerű adatokkal, ún. *skalárokkal* vagy *skalármennyiségekkel* fejezünk ki, míg mások leírásához a számadat mellett egy irány megadása is szükséges, és ez utóbbiakat nevezzük *vektoroknak*. A valóság ennél sokkal színesebb: a téridő 4-dimenziós vektoraitól, a bitvektorokon, a gazdasági számítások többszázezer-dimenziós, vagy az internetkeresők által kezelt sokmillió-dimenziós vektorain át a matematika különböző területein gyümölcsöző absztrakt vektorfogalomig széles a skála.

Vektorok a 2- és 3-dimenziós térben

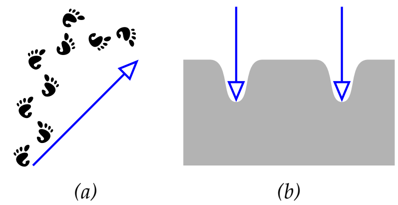
E szakaszban a vektor szemléletes, geometriai fogalmával ismerkedünk. A vektorok összeadásán és skalárral való szorzásán keresztül a lineáris kombináció és a lineáris függetlenség fogalmáig jutunk. E szakasz kulcsfogalma: egy vektor lineárisan független vektorok lineáris kombinációként való előállítása.

Irányított szakasz, kötött és szabad vektor Tekintsünk egy sárkányrepülőt repülés közben. Számtalan skalár- és vektormennyiség írja le állapotát. A földtől való távolság, a légnyomás, a légellenállási együttható vagy az emelkedés szöge skalármennyiségek, míg vektormennyiségek a sebesség- és gyorsulásvektor, a szárnyra ható felhajtóerő, a gravitációs erő, a szél ereje vagy az elmozdulást leíró vektor.

Skalár, skaláris: a *lépcső*, *létra* jelentésű latin scalae (scālae) szóból ered. E szó származéka a skála szó is, mely jól őrzi az eredeti jelentést. A skalár vagy skaláris szót a matematikában szám vagy számszerű értelemben használjuk, például olyankor, amikor egy mennyiségről azt akarjuk hangsúlyozni, hogy irány nélküli, azaz nem vektor jellegű.

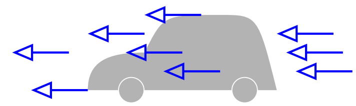
A vektor fogalma kapcsolatban van az irányított szakasz fogalmával. Irányított szakaszon olyan szakaszt értünk, melynek végpontjain megadunk egy sorrendet, azaz kijelöljük, hogy melyik a *kezdő-* és melyik a *végpontja*. Más szóhasználatban az irányított szakaszt szokás *kötött vektornak* is nevezni. Az A kezdőpontú és B végpontú irányított szakaszt $\overrightarrow{AB}$ jelöli.

Több jelenség leírására a kötött vektor alkalmas. Természetes példa az elmozdulásvektor, mely megadja, hogy egy tárgy a tér mely pontjából melyik pontjába jutott. Másik példa kötött vektorra a rugalmas testen alakváltozást okozó erőt leíró vektor (1.1. ábra).



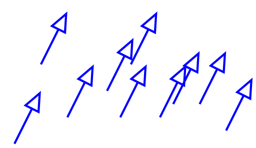
1.1. ábra: Kötött vektorok: *(a)* elmozdulásvektor (lábnyomokkal), *(b)* rugalmas testen alakváltozást okozó erő vektora

Alkalmazásokban gyakran előfordul, hogy egy jelenség különböző irányított szakaszokkal is ugyanúgy leírható. Például ha egy tárgy mozgását egy olyan irányított szakasszal jellemezzük, melynek hossza az időegység alatt megtett út hosszával egyenlő, iránya pedig a mozgás irányát jelzi, akkor mindegy hogy a tér melyik pontjából indítjuk e szakaszt, a mozgást ugyanúgy leírja (1.2. ábra). Ekkor tehát nem a két pont, hanem azok viszonya a kérdés, azaz hogy az egyik pont a másiktól milyen *távolságra*, és milyen *irányban* van. Az, hogy a két pont pontosan hol van, nem lényeges. Ekkor bármely két irányított szakasz, mely párhuzamosan egymásba tolható, ugyanazt a viszonyt fejezi ki. Az így kapott fogalmat a fizikában *szabad vektornak* nevezik. Ez a lineáris algebra vektor-fogalmának egyik forrása: a *vektor* a geometriában irányított szakasszal reprezentálható azt hozzávéve, hogy két irányított szakasz pontosan akkor reprezentálja ugyanazt a vektort, ha párhuzamosan egymásba tolhatók (ld. 1.3 ábra).



1.2. ábra: Példa szabad vektorra

VEKTOR: a *hordozó*, *vivő*, *utazó* jelentésű latin *vector* szóból származik. A tudomány más területein hordozó anyag, az élettanban vírushordozó értelemben használják.



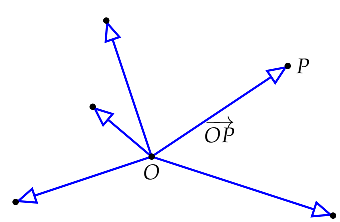
1.3. ábra: Ugyanazt a vektort reprezentáló irányított szakaszok

Vektorok jelölésére félkövér kisbetűket használunk, pl. $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, stb. A műszaki és fizikai szakirodalomban a félkövér nagy betű is előfordul, pl. az $\mathbf{F}$ erő, a $\mathbf{B}$ indukció is vektormennyiségek.

VEKTOROK JELÖLÉSE: Műszaki, fizikai szövegek szedésének tipográfiai szabályait az ISO 31-11 szabvány írja le. Eszerint a vektorok félkövér betűkkel szedendők. Kézírásban aláhúzással, vagy fölé írt nyíllal szokás jelezni a vektort (pl. $\underline{x}$, $\underline{u}$, $\vec{v}\dots$), de körültekintő jelölésrendszer és jegyzetelés esetén elhagyhatók a jelzések. Felsőbb matematikai művek nem használják e szabványt, mondván, kiderül a szövegből, hogy vektort jelölnek-e a betűk (x, u, $v\dots$).

Vektor magadása egy irányított szakasszal Egy vektor megadható egy irányított szakasszal, azaz két pont és a köztük lévő sorrend kijelölésével. Valójában ennyi adat felesleges, hisz egy irányított szakasz önmagával párhuzamosan eltolva ugyanazt a vektort adja meg, ezért például kiköthető, hogy a kezdőpont a sík (tér) egy előre kijelölt rögzített pontja legyen. Ezt a közös kezdőpontot nevezzük *origónak*. Egy origóból induló irányított szakaszt egyértelműen definiálja a végpontja, így a vektorok megadásához elég egyetlen pont, a végpont megadása. Ezzel a sík vagy tér pontjai és vektorai közt kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesíthetünk (1.4. ábra). Az origóból egy P pontba húzott irányított $\overrightarrow{OP}$ szakaszt a ponthoz tartozó *helyvektornak* is szokás nevezni. Világos, hogy minden vektor reprezentánsai közt pontosan egy helyvektor van.

A későbbiekben gyakran fogunk egy ponthalmazt az origóból a ponthalmaz pontjaiba mutató vektorokkal jellemezni. Amikor vektorok végpontjairól beszélünk, mindig a vektorokat megadó, az origóból indított irányított szakaszok végpontjaira gondolunk.

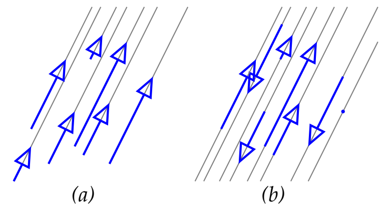


1.4. ábra: A sík pontjai és vektorai közti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés: egy P pontnak az $\overrightarrow{OP}$ vektor felel meg, az origónak a nullvektor.

Az olyan vektort, melynek kezdő és végpontja egybeesik, *zérusvektornak* vagy *nullvektornak* nevezzük. A zérusvektort általában félkövér zérussal, azaz $\mathbf{0}$-val jelöljük. A pontok és vektorok közti megfeleltetésben a zérusvektornak az origó felel meg.

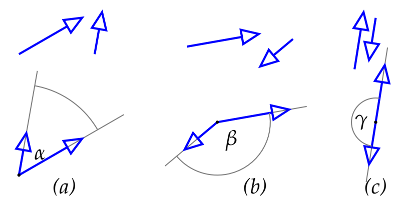
Vektor megadása hossz és irány segítségével Ha tudunk távolságot mérni, és irányt meghatározni, akkor a vektor megadható hosszával és irányával is. Vektor *hosszát*, azaz két végpontjának távolságát a vektor *abszolút értékének* is nevezzük. Az $\mathbf{a}$ vektor abszolút értékét $|\mathbf{a}|$ jelöli. Vektor abszolút értékét a vektor *euklideszi normájának* is nevezik, ugyanis speciális esete egy később részletezendő fogalomnak, a normának. Az $\mathbf{a}$ vektor (euklideszi) normájának jelölése az abszolút értékre emlékeztet: $\|\mathbf{a}\|$.

Az irány fogalmát az 1.23. feladatban definiáljuk. Itt megelégszünk annyival, hogy két nemzérus vektort *azonos irányú*nak vagy *egyirányú*nak nevezünk, ha a kezdőpontjukból induló, és a végpontjukon áthaladó félegyenesek párhuzamos eltolással fedésbe hozhatók (1.5 *(a)* ábra). Két nemzérus vektort *kollineáris*nak vagy *párhuzamos*nak nevezünk, ha az őket tartalmazó egyenesek párhuzamosak. Két vektort, amely párhuzamos, de nem egyirányú, *ellenkező irányú*nak nevezünk (1.5 *(b)* ábra). A zérusvektor irányát tetszőlegesnek tekintjük, így az bármely vektorral egyirányú. Belátható, hogy a vektort egyértelműen meghatározza hossza és iránya.



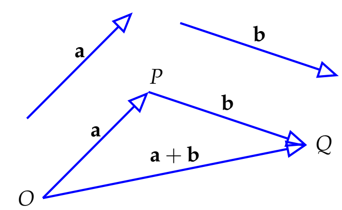
1.5. ábra: *(a)* egyirányú vektorok, *(b)* kollineáris (párhuzamos) vektorok, vannak köztük egyirányúak és ellenkező irányúak

Vektor irányának meghatározásakor gyakran hívjuk segítségül a szög fogalmát. Két vektor szögén azt a szöget értjük, melyet a sík vagy tér egy tetszőleges pontjából kiinduló és az adott vektorokkal egyirányú félegyenesek zárnak be (1.6. ábra). Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szögét $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle$ jelöli. Két vektor szöge tehát mindig $0°$ és $180°$ – radiánban mérve 0 és π – közé esik, beleértve a határokat is. Egyirányú vektorok szöge 0, ellenkező irányúaké π.



1.6. ábra: Két vektor szöge ($0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$). Az ábra felső felén a két adott vektor, alatta szögük meghatározásának módja szerepel.

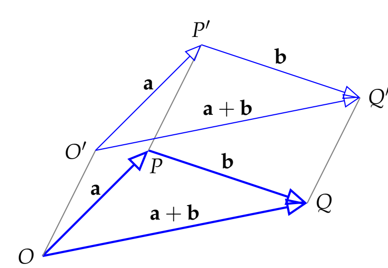
Vektorműveletek a 2- és 3-dimenziós térben A vektorműveletek – az összeadás és a számmal való szorzás – definíciója természetes módon adódik, ha a vektorok legtipikusabb alkalmazásaira gondolunk. Pl. magától értetődő, hogy két elmozdulás összegén az elmozgatások egymás után való elvégzését, egy eltolás kétszeresén egy azonos irányú, de kétszer olyan hosszú eltolást értsünk.



1.7. ábra: Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor összege

1.1. DEFINÍCIÓ (KÉT VEKTOR ÖSSZEGE – HÁROMSZÖGMÓDSZER). *Legyen adva két vektor, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$. Vegyünk föl egy tetszőleges O pontot. Indítsunk belőle egy $\mathbf{a}$-val egyenlő $\overrightarrow{OP}$ vektort, ennek végpontjából pedig egy $\mathbf{b}$-vel egyenlő $\overrightarrow{PQ}$ vektort. Az $\overrightarrow{OQ}$ vektort az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok összegének nevezzük és $\mathbf{a} + \mathbf{b}$-vel jelöljük (ld. 1.7. ábra).*

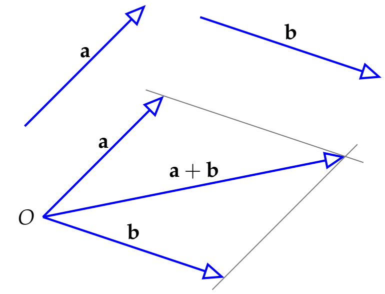
Könnyen belátható, hogy az eredmény független az O pont megválasztásától, tehát vektorok összeadásának művelete definiálható e módszerrel (a bizonyítás leolvasható az 1.8. ábráról).



1.8. ábra: Az összeg független az O pont megválasztásától, ugyanis $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{O'Q'}$.

Egy másik módszert is ismertetünk két nem kollineáris vektor összegének megszerkesztésére:

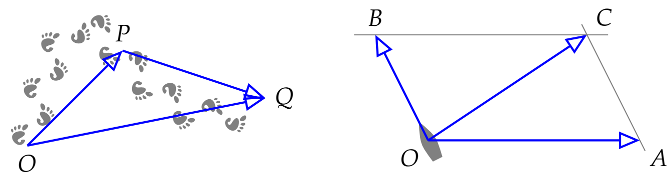
1.2. ÁLLÍTÁS (PARALLELOGRAMMA-MÓDSZER). *A közös kezdőpontból indított* **a** *és* **b** *vektorok összege megkapható abból a parallelogrammából, melynek két szomszédos oldala* **a** *és* **b**, *ekkor az összeg a közös kezdőpontból indított, és a parallelogramma szemközti csúcsába futó vektor.*



1.9. ábra: Parallelogramma-módszer

► Ha **a** és **b** *nem kollineárisak*, akkor összegük pl. megkapható úgy, hogy **a** végpontján át egy **b** egyenesével, **b** végpontján át egy **a** egyenesével párhuzamos egyenest húzunk. A közös kezdőpontból e két egyenes metszéspontjába futó vektor lesz az összeg (ld. 1.9. ábra).

Az alkalmazásokban hol a háromszög-, hol a parallelogramma-módszer tűnik kézenfekvőbbnek (ld. 1.10).

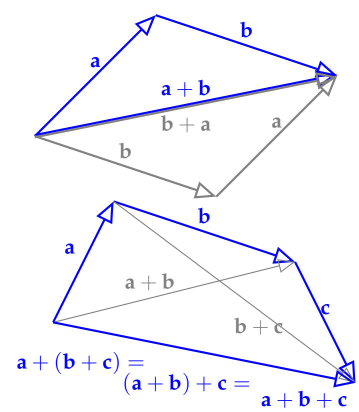


(a) (b)

1.10. ábra: Az *(a)* ábrán a lábnyomok O-ból P-be, majd onnan Q-ba vezetnek. Az $\overrightarrow{OP}$ és a $\overrightarrow{PQ}$ elmozdulásvektorok összege $\overrightarrow{OQ}$ (háromszögmódszer). A *(b)* ábrán a csónak az $\overrightarrow{OB}$ irányba evez, de a folyó $\overrightarrow{OA}$ irányba folyik. A két sebesség eredője, azaz összege $\overrightarrow{OC}$ (parallelogramma módszer).

Ha **a** és **b** két térbeli vektor, akkor a háromszögmódszerben és a parallelogramma-módszerben is az **a**, **b** és $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ vektorokat reprezentáló irányított szakaszok egy síkba esnek. Általában azt mondjuk, hogy néhány térbeli vektor egy síkba esik, más szóval *komplanáris*, ha van olyan sík, hogy mindegyik vektort reprezentáló irányított szakasz párhuzamosan betolható e síkba. Eszerint tehát az **a**, **b** és $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ vektorok mindig komplanárisak.

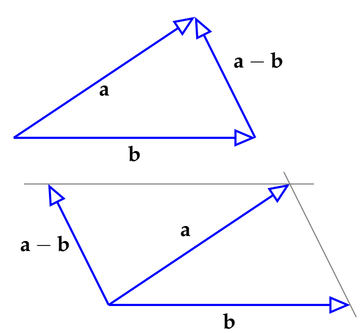
A vektorösszeadás két fontos tulajdonsága, kommutativitása ($\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$) és asszociativitása ($\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$) könnyen leolvasható az 1.11. ábráról. Az asszociativitás következtében több tag összeadásánál elhagyható a zárójel, például az ábrabeli három vektor összegére $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ írható.



1.11. ábra: A vektorösszeadás kommutativitása és asszociativitása.

Az **a** és **b** vektorokat közös kezdőpontból indítva – a háromszögmódszerrel – azonnal látható, hogy csak egyetlen olyan **x** vektor létezik, melyre $\mathbf{a}=\mathbf{b}+\mathbf{x}$ (ld. 1.12 (a) ábra). Ennek felhasználásával definiálható vektorok különbsége.

1.3. DEFINÍCIÓ (VEKTOROK KÜLÖNBSÉGE). *Adva van az* **a** *és* **b** *vektor. Azt az egyértelműen létező* **x** *vektort, melyre* $\mathbf{a}=\mathbf{b}+\mathbf{x}$, *az* **a** *és* **b** *különbségének nevezzük és* $\mathbf{a}-\mathbf{b}$*-vel jelöljük.*



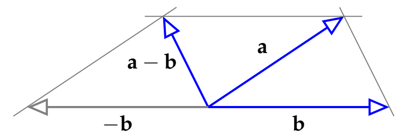
1.12. ábra: A különbségvektor meghatározása háromszög- és parallelogramma-módszerrel.

Könnyen fejben tartható a különbségvektor megszerkesztése akár a háromszög-, akár a parallelogrammamódszerrel (ld. 1.12. ábra), ha a definícióra gondolunk, azaz arra, hogy $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ az a vektor, melyet **b**-hez adva **a**-t kapunk, azaz

$$\mathbf{a}=\mathbf{b}+(\mathbf{a}-\mathbf{b}).$$

Az 1.13. ábráról az is leolvasható, hogy ha a $\mathbf{b}$ vektorral egyenlő hosszúságú, de ellenkező irányú vektort $-\mathbf{b}$ jelöli, akkor fönnáll az $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$ összefüggés, és így az is igaz, hogy $\mathbf{b}+(-\mathbf{b})=\mathbf{0}$.

Érdekes megjegyezni, hogy ha P és Q két tetszőleges pont, akkor az $\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$ vektort akkor is ismerjük, ha az O pontot nem, hisz az a $\overrightarrow{PQ}$ vektor. Sok hasonló jelenség vezetett a *torzor* fogalmához, melyet egy rövid széljegyzetben ismertetünk.



1.13. ábra: Az $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$ szemléltetése.

TORZOR: a modern matematika fogalma. Néhány példa, mielőtt definiálnánk: (1) Az energiát a newtoni fizikában nem tudjuk mérni, csak az energiakülönbséget. Ha viszont megállapodunk abban, hogy egy adott rendszernek melyik állapota tartozik a 0 energiaszinthez, beszélhetünk a rendszer energiájáról is. (2) A pontba mutató vektor fogalmának nincs értelme, amíg nincs kijelölve az origó, viszont két pontba mutató vektor különbségét az origótól függetlenül is meg tudjuk határozni. (3) Egy f függvény I intervallumon vett határozatlan integrálja $F+C$ alakú, ahol C konstans. Nincs értelme megkérdezni, hogy f egy konkrét primitív függvényében mennyi a C értéke, de két primitív függvény különbsége mindig egy konstans. (4) Egy hasonló jelenség a zenéből: bármely két hang közti távolság meghatározható, de azt nem mondhatjuk egy hangra, hogy az a „fá”, amíg nem rögzítjük, melyik a „dó”.

A torzort egy *kommutatív csoport* nevű algebrai struktúrával definiálhatjuk, mely egy kommutatív, asszociatív, nullelemes, invertálható művelettel ellátott és e műveletre zárt halmaz. Kommutatív csoport például a valósok az összeadásra nézve, a vektorok az összeadásra nézve, vagy $\mathbb{Z}_{12}$ az összeadásra nézve (ld. a **??**. példát és a **??**. definíciót). Legyen G egy kommutatív csoport, és X egy nem üres halmaz, melyen definiálva van bármely két elem különbsége, ami G-beli. Ekkor X-et G-*torzornak* nevezzük, ha bármely $x_0, x_1, x_2 \in X$ elem esetén, ha $x_1-x_0=g_1$ és $x_2-x_0=g_2$, akkor $x_1-x_2=g_1-g_2$. Másként fogalmazva, X őrzi G struktúráját a zéruselem nélkül úgy, hogy bármely elemét zéruselemnek választva azonnal megkapjuk G-t.

1.4. DEFINÍCIÓ (VEKTOR SZORZÁSA SKALÁRRAL). *Legyen k valós szám. Az $\mathbf{a}$ vektor k-szorosán azt a vektort értjük, melynek hossza az $\mathbf{a}$ hosszának $|k|$-szorosa, iránya*

- *tetszőleges, ha $k=0$ vagy $\mathbf{a}=\mathbf{0}$,*
- *megegyezik $\mathbf{a}$ irányával, ha $k>0$, és*
- *ellentétes, ha $k<0$ (ld. 1.14. ábra).*

A skalárral való szorzás definíciójából azonnal látszik, hogy minden $\mathbf{a}$ vektorra $1\mathbf{a}=\mathbf{a}$, $0\mathbf{a}=\mathbf{0}$ és $(-1)\mathbf{a}=-\mathbf{a}$.

E paragrafus végén összefoglaljuk a vektorműveletek legfontosabb tulajdonságait, melyek segítségével később általánosítani fogjuk a vektor fogalmát. Az eddig nem bizonyított tulajdonságok igazolását az olvasóra hagyjuk.

1.5. TÉTEL (A VEKTORMŰVELETEK TULAJDONSÁGAI). *Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ a 2- vagy 3-dimenziós tér tetszőleges vektorai, $\mathbf{0}$ a zérusvektor és r, s két tetszőleges valós szám, akkor fönnállnak az alábbi azonosságok:*

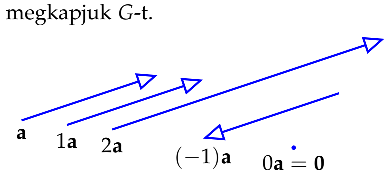
a)	$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$	*e)*	$r(s\mathbf{a})=(rs)\mathbf{a}$
b)	$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$	*f)*	$r(\mathbf{a}+\mathbf{b})=r\mathbf{a}+r\mathbf{b}$
c)	$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$	*g)*	$(r+s)\mathbf{a}=r\mathbf{a}+s\mathbf{a}$
d)	$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$	*h)*	$1\mathbf{a}=\mathbf{a}$ *és* $0\mathbf{a}=\mathbf{0}$

A lineáris kombináció definíciója Ha vektorokra a skalárral való szorzás és az összeadás műveletét alkalmazzuk, akkor e vektorok egy lineáris kombinációját kapjuk. Pontosabban:

1.6. DEFINÍCIÓ (LINEÁRIS KOMBINÁCIÓ). *Az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,… $\mathbf{a}_k$ vektorok* lineáris kombináció*ján egy*

$$c_1\mathbf{a}_1+c_2\mathbf{a}_2+\ldots+c_k\mathbf{a}_k$$

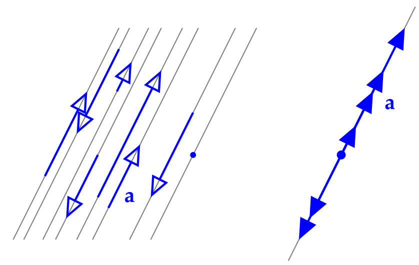
alakú vektort értünk, ahol $c_1, c_2, \ldots, c_k$ valós számok. Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{v}$ vektor előáll *az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,…, $\mathbf{a}_k$ vektorok lineáris kombinációjaként, ha vannak olyan $c_1, c_2, \ldots, c_k$ valós számok, hogy $\mathbf{v}=c_1\mathbf{a}_1+\ldots+c_k\mathbf{a}_k$.*



1.14. ábra: Vektor skalárszorosai

Ha egy vektort egy skalárral beszorzunk, az előző definíció szerint egy lineáris kombinációját kapjuk, mely vele párhuzamos, azaz kollineáris. Így egy nemzérus vektor összes lineáris kombinációja csupa vele párhuzamos vektor (ld. 1.15. ábrát). Ennél több is igaz:

1.7. TÉTEL (VEKTORRAL PÁRHUZAMOS VEKTOROK). *Ha* $\mathbf{a}$ *nem zérusvektor, akkor bármely vele párhuzamos* $\mathbf{v}$ *vektor az* $\mathbf{a}$ *skalárszorosa, azaz van olyan* c *valós szám, hogy* $\mathbf{v} = c\mathbf{a}$*, más szóval* $\mathbf{v}$ *előáll az* $\mathbf{a}$ *valamely lineáris kombinációjaként. Ez az előállítás egyértelmű.*



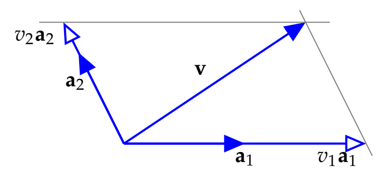
1.15. ábra: Egy nemzérus $\mathbf{a}$ vektor, és néhány lineáris kombinációja kétféle reprezentációban.

BIZONYÍTÁS. Ha a két vektor egyirányú, az előállításban szereplő c konstans egyszerűen a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{a}$ vektorok abszolút értékének hányadosa, ha ellenkező irányúak, e hányados (-1)-szerese. □

E tétel következménye, hogy ha $\mathbf{a}$ nem zérusvektor, akkor az $\mathbf{a}$ összes lineáris kombinációjának halmaza és az $\mathbf{a}$-val párhuzamos vektorok halmaza megegyezik. Másként fogalmazva: egy nemzérus vektor összes lineáris kombinációjának végpontja egy *origón átmenő egyenest ad*.

A háromszögmódszerből jól látszik, hogy tetszőleges két vektor bármely lineáris kombinációja velük komplanáris vektor lesz. Az állítás megfordítása is igaz:

1.8. TÉTEL (KÉT VEKTORRAL EGY SÍKBA ESŐ VEKTOROK). *Ha* $\mathbf{a}_1$ *és* $\mathbf{a}_2$ *nem párhuzamos vektorok, akkor bármely velük egy síkba eső* $\mathbf{v}$ *vektor előáll az* $\mathbf{a}_1$ *és* $\mathbf{a}_2$ *valamely lineáris kombinációjaként, azaz van olyan* v_1 *és* v_2 *konstans, hogy* $\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2$*. Ez az előállítás egyértelmű.*



1.16. ábra: A $\mathbf{v}$ egyértelműen előáll $\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2$ alakban, ha $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ nem párhuzamos.

BIZONYÍTÁS. A bizonyításnak a felbontás létezését biztosító része könnyen leolvasható az 1.16. ábráról. A $\mathbf{v}$ végpontjából húzzunk az $\mathbf{a}_1$ és az $\mathbf{a}_2$ vektorokkal párhuzamos egyeneseket. Az így létrejött nem elfajuló parallelogramma két oldala az előző tétel szerint $\mathbf{a}_1$, illetve $\mathbf{a}_2$ konstansszorosa, melyek összege a parallelogramma szabály szerint épp $\mathbf{v}$. Előállítottuk tehát $\mathbf{v}$-t $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ lineáris kombinációjaként. Meg kell még mutatnunk, hogy ez az előállítás egyértelmű. Legyen

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 = w_1\mathbf{a}_1 + w_2\mathbf{a}_2.$$

a $\mathbf{v}$ vektor két előállítása. Ekkor átrendezés után $(v_1 - w_1)\mathbf{a}_1 = (w_2 - v_2)\mathbf{a}_2$. Mivel $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ nem kollineárisak, konstansszorosaik csak akkor egyezhetnek meg, ha mindkettő a zérusvektor. Ugyanakkor $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}$, ezért az előző egyenlőség csak akkor áll fönn, ha $(v_1 - w_1) = (w_2 - v_2) = 0$, azaz ha $v_1 = w_1$ és $v_2 = w_2$. Tehát a felbontás egyértelmű. □

Látható tehát, hogy két nem párhuzamos vektor összes lineáris kombinációjának halmaza megegyezik a két vektorral komplanáris vektorok halmazával, egyszerűbben fogalmazva két nem párhuzamos vektor összes lineáris kombinációjának végpontja *egy origón átmenő síkot ad*.

Abban nincs semmi meglepő, hogy a tér három nem egy síkba eső vektorának bármely lineáris kombinációja térbeli vektor, az állítás megfordítása viszont igen fontos:

1.9. TÉTEL (TÉRBELI VEKTOROK). *Ha $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ nem egy síkba eső vektorok, akkor a tér bármely $\mathbf{v}$ vektora előáll az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ valamely lineáris kombinációjaként, azaz van olyan v_1, v_2 és v_3 konstans, hogy*

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3. \tag{1.1}$$

Ez az előállítás egyértelmű.

BIZONYÍTÁS. A bizonyítás alapötlete az, hogy a $\mathbf{v}$ vektor V végpontján át párhuzamos egyenest húzunk az $\mathbf{a}_3$ vektorral, mely az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ vektorok síkját egy C pontban metszi. Az $\overrightarrow{OC}$ vektor az előző tétel szerint egyértelműen előáll $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ lineáris kombinációjaként (1.17. ábra), azaz $\overrightarrow{OC} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2$. Másrészt $\mathbf{v} = \overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CV}$, ahol $\overrightarrow{CV} \parallel \mathbf{a}_3$, így $\overrightarrow{CV} = v_3\mathbf{a}_3$ valamely v_3 valósra. Tehát $\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3$.

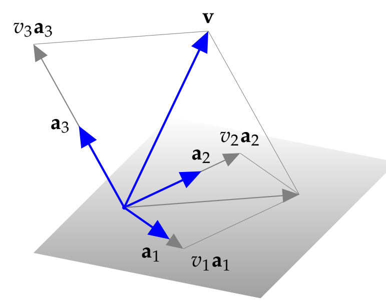
Be kell még látnunk az előállítás egyértelműségét! Tegyük fel, hogy

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3 = w_1\mathbf{a}_1 + w_2\mathbf{a}_2 + w_3\mathbf{a}_3$$

a $\mathbf{v}$ két felbontása. Ekkor $(v_1 - w_1)\mathbf{a}_1 + (v_2 - w_2)\mathbf{a}_2 + (v_3 - w_3)\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$. Így ha $v_1 \neq w_1$, akkor $\mathbf{a}_1$ kifejezhető $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{v_2 - w_2}{v_1 - w_1}\mathbf{a}_2 - \frac{v_3 - w_3}{v_1 - w_1}\mathbf{a}_3.$$

Ez ellentmond annak, hogy $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ nem esnek egy síkba. Így tehát $v_1 = w_1$. Hasonlóan kapjuk, hogy $v_2 = w_2$ és $v_3 = w_3$, azaz az (1.1) előállítás egyértelmű. □



1.17. ábra: A térbeli $\mathbf{v}$ vektor előállítása három nem egy síkba eső vektor lineáris kombinációjaként.

Lineáris függetlenség Az előző két tételből világos, hogy a tér három vektora vagy egy síkba esik, ekkor valamelyikük a másik kettő lineáris kombinációja, vagy nem esik egy síkba, és akkor egyikük sem áll elő a másik kettő lineáris kombinációjaként. Ekkor viszont a tér minden vektora előáll az ő lineáris kombinációjukként. Látjuk, alapvető, hogy egy vektor kifejezhető-e más vektorok lineáris kombinációjaként.

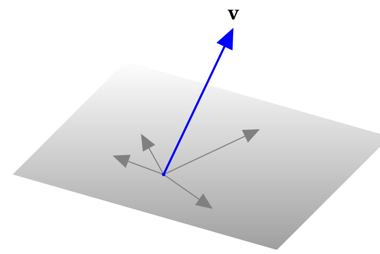
1.10. DEFINÍCIÓ (VEKTOROK FÜGGETLENSÉGE). *Azt mondjuk, hogy egy $\mathbf{v}$ vektor* lineárisan független *az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,... $\mathbf{a}_n$ ($n \geq 1$) vektoroktól, ha $\mathbf{v}$ nem fejezhető ki e vektorok lineáris kombinációjaként. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,... $\mathbf{a}_n$ ($n \geq 2$) vektorok* lineárisan függetlenek *ha e vektorok egyike sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként. Ha legalább egyikük kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, azaz legalább egyikük* lineárisan függ *a többitől, akkor e vektorokat* lineárisan összefüggőknek *nevezzük. Az egyetlen vektorból álló vektorrendszert lineárisan függetlennek tekintjük, ha a vektor nem a zérusvektor.*

Például egy térbeli vektor, mely nem esik egy adott síkba, független a síkba eső vektorok bármely rendszerétől (1.19. ábra).

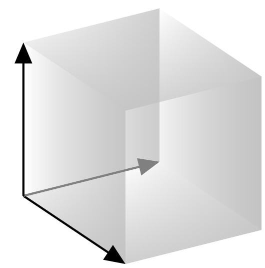
Egy kocka egy csúcsból kiinduló élvektorai lineárisan függetlenek (1.19. ábra).

Általában: bármely két nem kollineáris vektor lineárisan független, hasonlóképp, a tér bármely három nem komplanáris, azaz nem egy síkba eső vektora lineárisan független.

Az 1.8. tétel tehát a következőképp fogalmazható át:



1.18. ábra: A síkba nem eső **v** vektor nem áll elő a síkbeli vektorok lineáris kombinációjaként.



1.19. ábra: Egy kocka három egy csúcsból induló élvektora lineárisan független.

1.11. TÉTEL (SÍKBELI VEKTOR FELBONTÁSA). *Ha $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ egy sík két lineárisan független vektora, akkor a sík minden $\mathbf{v}$ vektora egyértelműen előáll e vektorok lineáris kombinációjaként, azaz egyértelműen léteznek olyan v_1 és v_2 valós számok, hogy*

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2.$$

Hasonlóképp az 1.9. tétel így fogalmazható át:

1.12. TÉTEL (TÉRBELI VEKTOR FELBONTÁSA). *Ha $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ három lineárisan független térbeli vektor, akkor a tér minden $\mathbf{v}$ vektora egyértelműen előáll e vektorok lineáris kombinációjaként, azaz egyértelműen léteznek olyan v_1, v_2 és v_3 valós számok, hogy*

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3.$$

A koordinátákról szóló szakaszban e két tétel lesz alapja a koordinátarendszer bevezetésének.

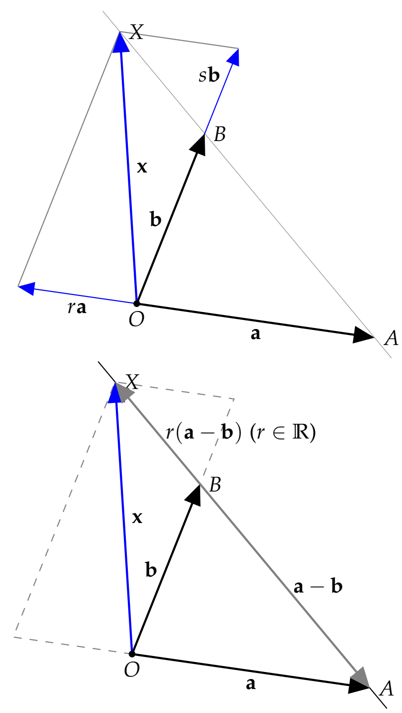
*Speciális lineáris kombinációk** A sík és a tér bizonyos konfigurációi jól jellemezhetők lineáris kombinációkkal, ha a kombinációs együtthatókra bizonyos feltételeket kötünk ki.

1.13. ÁLLÍTÁS (KÉT PONTON ÁTMENŐ EGYENES JELLEMZÉSE). *Legyen O, A és B a sík vagy a tér három pontja. Az $r\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}$ alakú lineáris kombináció végpontja pontosan akkor mutat az A és B ponton átmenő egyenes egy pontjába, ha $r + s = 1$.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, és $\mathbf{x}$ mutasson az AB egyenes valamely X pontjára, azaz legyen $\mathbf{x} = \overrightarrow{OB} + r\overrightarrow{BA}$ valamilyen r valós számra, tehát

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} + r(\mathbf{a} - \mathbf{b}), \text{ azaz } \mathbf{x} = r\mathbf{a} + (1 - r)\mathbf{b}.$$

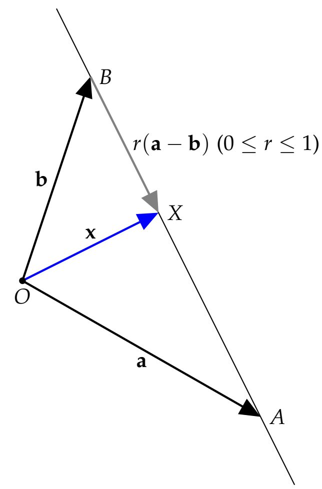
A fenti gondolatmenet lépésein visszafelé haladva látható, hogy minden valós r számra az $r\mathbf{a} + (1 - r)\mathbf{b}$ vektor végpontja az AB egyenesen van. Fogalmazhatunk úgy is, hogy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok végpontján átmenő egyenes összes pontját pontosan azok az $r\mathbf{a} + s\mathbf{b}$ alakú lineáris kombinációk adják, amelyeknél $r + s = 1$. □



1.20. ábra: Az X pont pontosan akkor van az AB egyenesen, ha valamely r és s valósokra $r + s = 1$ és $\overrightarrow{OX} = r\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}$. Ezen az ábrán $r = -0.5$, $s = 1.5$.

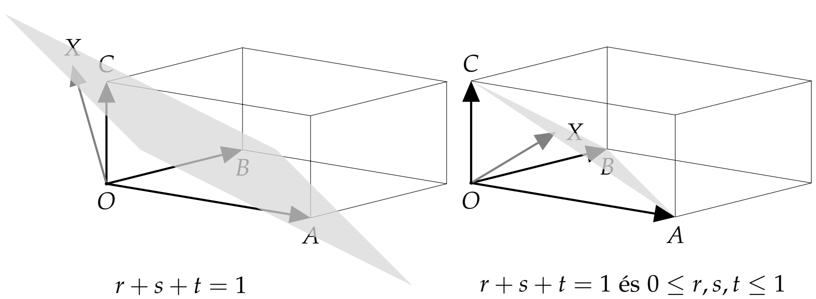
1.14. ÁLLÍTÁS (INTERVALLUM PONTJAINAK JELLEMZÉSE). *Legyen O, A és B a sík vagy a tér három pontja. Az $r\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}$ vektor pontosan akkor mutat az A és B pontot összekötő szakasz valamely pontjába, ha $r+s=1$ és $0 \le r,s \le 1$.*

BIZONYÍTÁS. Megismételjük az előző feladat megoldását azzal a különbséggel, hogy itt a $\overrightarrow{BX}=r\overrightarrow{BA}$ összefüggés csak 0 és 1 közé eső r értékekre igaz. Tehát $\mathbf{x}=r\mathbf{a}+(1-r)\mathbf{b}$, ahol $0 \le r \le 1$. Másként fogalmazva az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok végpontjait összekötő szakasz összes pontját pontosan azok a $r\mathbf{a}+s\mathbf{b}$ alakú lineáris kombinációk adják, amelyekben $r+s=1$ és $0 \le r,s \le 1$. □



1.21. ábra: Az X pont pontosan akkor van az $\overline{AB}$ intervallumban, ha valamely 0 és 1 közé eső r és s valósokra $\overrightarrow{OX}=r\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}$, és $r+s=1$.

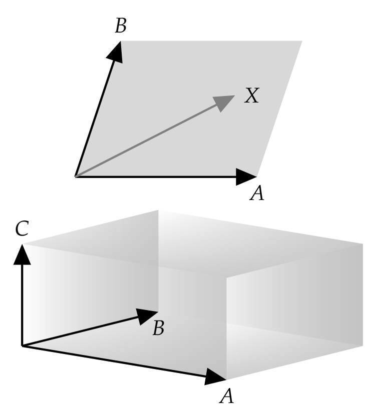
Hasonló összefüggés igaz három vektor esetén is, azaz megmutatható, hogy a nem kollineáris $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok végpontjaira fektetett sík pontjaiba pontosan azok a vektorok mutatnak, melyeket $r\mathbf{a}+s\mathbf{b}+t\mathbf{c}$ alakba írva $r+s+t=1$. Ha még azt is kikötjük e három számról, hogy legyen $0 \le r,s,t \le 1$, akkor az $r\mathbf{a}+s\mathbf{b}+t\mathbf{c}$ alakú vektorok a három vektor végpontja által meghatározott háromszög pontjaiba mutatnak (ld. az 1.22. ábrát és a **??** feladatot).



1.22. ábra: Az X pont pontosan akkor esik az A, B és C pontokon átmenő síkba, ha $\overrightarrow{OX}=r\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$ és $r+s+t=1$. Az X az ABC háromszögbe pedig pontosan akkor esik, ha ezen kívül még $0 \le r,s,t \le 1$ is fönnáll.

Szemléletesen világos, például a mellékelt 1.23. ábráról leolvasható, de nem bizonyítjuk, hogy két tetszőleges nem kollineáris vektor összes olyan lineáris kombinációja, amelyben az együtthatók 0 és 1 közé esnek, egy parallelogrammát ad. Pontosabban fogalmazva egy $r\mathbf{a}+s\mathbf{b}$ alakú vektor végpontja pontosan akkor tartozik az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által meghatározott (kifeszített) *parallelogrammához*, ha $0 \le r,s \le 1$.

Hasonló mondható három, nem egy síkba eső vektorról: egy $r\mathbf{a}+s\mathbf{b}+t\mathbf{c}$ alakú vektor végpontja pontosan akkor tartozik az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ által kifeszített *parallelepipedonhoz*, ha $0 \le r,s,t \le 1$ (1.23. ábra).

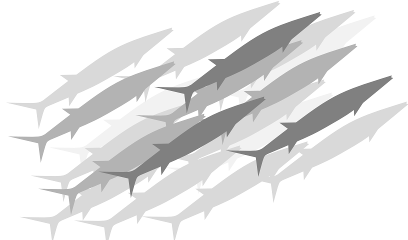


1.23. ábra: A *parallelogramma* és a *parallelepipedon* olyan lineáris kombinációkkal állítható elő, ahol az együtthatók nem negatívak, és összegük legföljebb 1.

Feladatok

Vektor

1.1. Egy matematikán kívüli szemléltetés a vektor fogalmához: hogyan fejeznénk be az alábbi hasonlatot? „Ha az irányított szakasz a hal, akkor a vektor a…”



1.2.• VEKTOROK: IGAZ – HAMIS Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül?

a) Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok hajlásszöge α, akkor $\mathbf{a}$ és $-\mathbf{b}$ hajlásszöge $\pi - \alpha$.

b) Ha A és B két adott pont, akkor az $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ vektor független az O megválasztásától.

c) Ha A és B két adott pont, akkor az $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ vektor független az O megválasztásától.

d) Ha két vektor egyirányú, akkor egyikük a másik skalárszorosa.

e) Ha két vektor egyike a másik skalárszorosa, akkor egyirányúak.

f) Ha két vektor egyike a másik skalárszorosa, akkor párhuzamosak.

Vektorműveletek a 2- és 3-dimenziós térben

1.3. Adva van a síkban két tetszőleges vektor, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$. Szerkesszük meg a következő vektorokat: *a)* $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b}$, *b)* $\mathbf{d} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, *c)* $\mathbf{e} = \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$, *d)* $\mathbf{f} = \frac{2}{5}\mathbf{a} + \frac{3}{5}\mathbf{b}$.

1.4. Legyen $\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{v} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$. Fejezzük ki az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor segítségével a következő vektorokat: *a)* $2\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$, *b)* $3\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$, *c)* $3\mathbf{u} - \mathbf{v}$, *d)* $2\mathbf{u} - \frac{1}{2}\mathbf{v}$.

1.5. Tekintsük az $ABCD$ négyzetet. Határozzuk meg a következő összegeket! *a)* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, *b)* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$, *c)* $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, *d)* $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$, *e)* $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$, *f)* $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB}$, *g)* $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

1.6. Tekintsük az $ABCD$ négyzetet. Jelölje a BC oldal felezőpontját E, a CD oldal felezőpontját F, a négyzet középpontját O. Fejezzük ki az egymásra merőleges $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ és $\mathbf{d} = \overrightarrow{AD}$ vektorok segítségével az $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{OF}$ vektorokat!

1.7. Tekintsük az $ABCD$ tetraédert! Határozzuk meg az

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$,

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}$,

c) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$

vektorokat.

1.8. Tekintsük a szabályos $ABCDEF$ hatszöget, melynek geometriai középpontját jelölje O. Fejezzük ki az $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ és $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ vektorok segítségével az *a)* $\overrightarrow{OC}$, *b)* $\overrightarrow{OE}$, *c)* $\overrightarrow{OF}$, *d)* $\overrightarrow{AC}$, *e)* $\overrightarrow{BD}$, *f)* $\overrightarrow{BF}$, *g)* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$ vektorokat!

1.9.• Adva van n tetszőleges, nem feltétlenül különböző P_1, P_2,…,P_n pont a térben. Mivel egyenlő a

$$\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_3P_4} + \ldots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n}$$

és a

$$\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_3P_4} + \ldots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n} + \overrightarrow{P_nP_1}$$

összeg?

1.10. Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok pontosan akkor lehetnek (egy esetleg szakasszá vagy ponttá elfajuló) háromszög oldalvektorai, ha az

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$$

vektorok legalább egyike zérus. Másként fogalmazva: ha a három vektor összege $\mathbf{0}$, vagy valamelyik vektor egyenlő a másik kettő összegével.

1.11. Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két tetszőleges vektor. Mutassuk meg, hogy van olyan (esetleg elfajuló) háromszög, melynek oldalvektorai $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ és $3\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Lineáris kombináció, lineáris függetlenség

1.12.• LINEÁRIS ÖSSZEFÜGGŐSÉG: IGAZ – HAMIS Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül?

a) Ha három vektor a térben lineárisan összefüggő, akkor bármelyikük a másik kettő lineáris kombinációja.

b) Megadható a térben három vektor, hogy egyikük sem lineárisan független a többitől.

c) Megadható a térben három vektor, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$, hogy $\mathbf{a}$ független a $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektoroktól, de $\mathbf{b}$ nem független az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ vektoroktól.

d) Ha három térbeli vektor egy síkba esik, akkor mindegyik kifejezhető a másik kettő lineáris kombinációjaként!

Speciális lineáris kombinációk

1.13.• SZAKASZT $m : n$ ARÁNYBAN OSZTÓ PONT Ha az $\overline{AB}$ szakaszt a P pont úgy bontja ketté, hogy $|\overline{AP}| : |\overline{PB}| = m : n$, akkor bármely O pontra igaz, hogy

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}.$$

Speciálisan, az $\overline{AB}$ szakasz felezőpontjába az

$$\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

vektor mutat.

Távolság, szög, orientáció

A címben jelzett három alapfogalomhoz három – vektorok közti – szorzásművelet visz közelebb. Mindegyik művelet igen szokatlan tulajdonságokkal rendelkezik: az egyik eredményül nem vektort, hanem skalárt ad, a másik nem felcserélhető, és kétváltozós (bináris) műveletként csak a 3-dimenziós térben definiálható, a harmadik pedig nem két- hanem háromváltozós művelet.

Skaláris szorzás A fizikában az erő által végzett munka az út hosszának és az erő elmozdulás irányába eső merőleges vetülete hosszának szorzata. Vagyis két vektorjellegű mennyiségből egy skalármennyiséget kapunk eredményül. Ha $\mathbf{F}$ jelöli az erővektort, $\mathbf{s}$ az elmozdulásvektort, $\mathbf{F}_s$ az erőnek az elmozdulás irányába eső merőleges vetületi vektorát és γ az $\mathbf{F}$ és $\mathbf{s}$ vektorok hajlásszögét, akkor a munka értéke $|\mathbf{F}_s||\mathbf{s}| = |\mathbf{F}||\mathbf{s}|\cos\gamma$. Ez vezet a következő definícióhoz:

1.15. DEFINÍCIÓ (KÉT VEKTOR SKALÁRIS SZORZATA). *Két vektor* skaláris szorzatán *a vektorok abszolút értékének és az általuk bezárt szög koszinuszának szorzatát értjük. Az* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektorok skaláris szorzatát* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ *jelöli, tehát*

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle,$$

ahol a két vektor által bezárt szög $(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle$.

Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ valamelyike zérusvektor, akkor a két vektor szöge, s így annak koszinusza sem határozható meg egyértelműen, a skaláris szorzat viszont ekkor is egyértelmű, éspedig 0, hisz a zérusvektor abszolút értéke 0, és 0 bármivel vett szorzata 0.

Szokás $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ skaláris szorzatát $\mathbf{ab}$-vel is jelölni, de ezt egy később bevezetendő művelettel (a mátrixszorzással) való összekeverés elkerülése érdekében e könyvben nem fogjuk használni.

1.16. PÉLDA (SKALÁRIS SZORZAT KISZÁMÍTÁSA A DEFINÍCIÓ ALAPJÁN). *Mennyi a skaláris szorzata egy* 1 *és egy* 2 *egység hosszú, és egymással* $60°$*-os szöget bezáró két vektornak?*

MEGOLDÁS. A szorzat $1\cdot 2\cdot\cos 60° = 1\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 1$. □

1.17. TÉTEL (MIKOR 0 A SKALÁRIS SZORZAT?). *Két vektor skaláris szorzata pontosan akkor* 0, *ha a két vektor merőleges egymásra.*

BIZONYÍTÁS. ($\Longleftarrow$) Ha $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$, akkor $(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = \pi/2$, azaz $\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = 0$, tehát $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$.

($\Longrightarrow$) Ha $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$, azaz $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = 0$, akkor $|\mathbf{a}| = 0$, $|\mathbf{b}| = 0$ vagy $\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = 0$. Ha valamelyik vektor zérusvektor, akkor iránya bármely vektoréra merőlegesnek tekinthető. Ha viszont $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ és $\mathbf{b}\neq$

$\mathbf{0}$, akkor $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle = 0$, a cos függvénynek a $[0, \pi]$ intervallumban csak $\pi/2$-ben van zérushelye, tehát a két vektor merőleges egymásra. □

1.18. TÉTEL (A SKALÁRIS SZORZÁS MŰVELETI TULAJDONSÁGAI). *Ha* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *és* $\mathbf{c}$ *tetszőleges térbeli (síkbeli) vektorok és* r *tetszőleges valós szám, akkor igazak az alábbi összefüggések:*

a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ *(kommutativitás)*

b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ *(disztributivitás)*

c) $r(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (r\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (r\mathbf{b})$

d) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0$, *ha* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, *és* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$, *ha* $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

A bizonyítást az olvasóra hagyjuk.

Mivel két vektor skaláris szorzata skalár, ezért az asszociativitás (csoportosíthatóság) kérdése föl sem vethető, hisz az $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ szorzatban két különböző szorzásművelet szerepel. Mindezzel együtt $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \neq \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ (ld. az 1.15. feladatot).

Hosszúság és szög Egy vektor hossza, és ezzel két pont távolsága, valamint két vektor hajlásszöge kifejezhető a skaláris szorzat segítségével.

Egy tetszőleges $\mathbf{a}$ vektorra $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}||\mathbf{a}| \cos 0 = |\mathbf{a}||\mathbf{a}|$, tehát

$$|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}, \text{ azaz } |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}.$$

E képlet szerint tehát egy *vektor hossza* megegyezik az önmagával vett skaláris szorzat gyökével. Ebből az is adódik, hogy *két pont távolsága* megegyezik az őket összekötő vektor önmagával vett skaláris szorzatának négyzetgyökével.

Két pontot összekötő vektor egyenlő az oda mutató helyvektorok különbségével, így ha a két pontba mutató helyvektor $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$, akkor a pontok távolsága – és ezt fogjuk a vektorok távolságának is tekinteni

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|.$$

Két vektor skaláris szorzatának és a vektorok hosszának ismeretében a *szögük* meghatározható:

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \tag{1.2}$$

Pithagorász-tétel A távolságot vagy hosszúságot skaláris szorzattal is ki tudjuk fejezni, így segítségével a rá vonatkozó összefüggések is vizsgálhatók.

1.19. TÉTEL (PITHAGORÁSZ-TÉTEL). *Az* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektorokra pontosan akkor teljesül az*

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$$

összefüggés, ha $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *merőlegesek egymásra.*

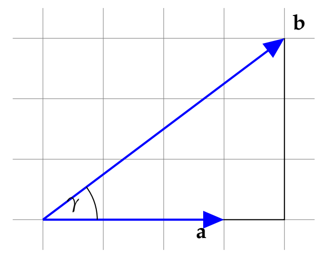
Bizonyítás.

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \\
&= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} && \text{disztributivitás} \\
&= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} && \text{kommutativitás} \\
&\overset{?}{=} \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} && ? \\
&= |\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2,
\end{aligned}
$$

Világos, hogy a ?-lel megjelölt egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$, azaz ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőlegesek egymásra. □

1.20. PÉLDA (Skaláris szorzat kiszámítása). *Számítsuk ki az ábrán látható két vektor skaláris szorzatát (a szomszédos rácsvonalak távolsága 1 egység).*

Megoldás. Az $\mathbf{a}$ vektor hossza 3, a $\mathbf{b}$ vektor hossza a Pithagorász-tétellel kiszámolható: $\sqrt{4^2+3^2} = 5$, a vektorok által közbezárt szög koszinusza $\cos\gamma = \frac{4}{5}$, így a skaláris szorzat $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 3\cdot 5\cdot\frac{4}{5} = 12$. □



1.24. ábra: Két vektor skaláris szorzata

Két fontos egyenlőtlenség Mivel a koszinusz függvény értéke abszolút értékben sosem nagyobb 1-nél, ezért a skaláris szorzat definíciójából azonnal látszik, hogy

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|.$$

Ezzel bizonyítottuk a következő tételt:

1.21. TÉTEL (Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség). *Két vektor skaláris szorzatának abszolút értéke sosem nagyobb abszolút értékeik szorzatánál, azaz*

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|.$$

A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség segítségével bizonyítjuk a geometriából jól ismert háromszög-egyenlőtlenséget. Ennek az az értelme, hogy e bizonyítás változtatás nélkül működni fog sokkal általánosabb körülmények között is.

1.22. TÉTEL (Háromszög-egyenlőtlenség). *Bármely két $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorra*

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|.$$

Bizonyítás. Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldalán nemnegatív szám áll, ezért vele ekvivalens egyenlőtlenséghez jutunk, ha mindkét oldalt négyzetre emeljük.

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \\
&= |\mathbf{a}|^2 + 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2 \qquad \text{ld. az 1.19. tétel bizonyítását} \\
&\le |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 \\
&\le |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 \\
&= (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2 .
\end{aligned}
$$

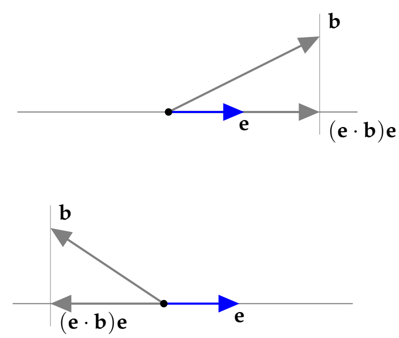
És ezt akartuk bizonyítani. □

Egységvektorral való szorzás és a merőleges vetítés Minden olyan vektort, melynek abszolút értéke 1, *egységvektornak* nevezünk.

Ha $\mathbf{a}$ egy tetszőleges nemzérus vektor, akkor $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ egységvektor, ugyanis abszolút értéke 1:

$$\left|\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right| = \frac{1}{|\mathbf{a}|}|\mathbf{a}| = 1.$$

1.23. TÉTEL (EGYSÉGVEKTORRAL VALÓ SZORZÁS GEOMETRIAI JELENTÉSE). *Ha* $\mathbf{e}$ *egységvektor, akkor a* $\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{e}\cdot\mathbf{b})\mathbf{e}$ *vektor a* $\mathbf{b}$ *vektornak az* $\mathbf{e}$ *egyenesére való merőleges vetülete. Az* $\mathbf{e}\cdot\mathbf{b}$ *szorzat e vetület előjeles hossza, mely pozitív, ha* $\hat{\mathbf{b}}$ *és* $\mathbf{e}$ *egyirányúak, és negatív, ha ellenkező irányúak.*



1.25. ábra: Az $\mathbf{b}$ vektor és az $\mathbf{e}$ egységvektor egyenesére eső vetülete. A felső ábrán $\mathbf{e}\cdot\mathbf{b} > 0$, az alsón $\mathbf{e}\cdot\mathbf{b} < 0$.

BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{e}$ egységvektor, azaz abszolút értéke 1, akkor $\mathbf{e}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\cos(\mathbf{e},\mathbf{b})_\angle$, ez pedig a koszinusz függvény definíciója szerint $\mathbf{b}$ merőleges vetületének előjeles hosszát jelenti. E szám $\mathbf{e}$-szerese pedig egy $\mathbf{e}$ irányú, és ilyen hosszú vektort ad, mely épp $\mathbf{b}$ vetületi vektora. □

Jelölje a továbbiakban a $\mathbf{b}$ vektornak az $\mathbf{a}$ egyenesére eső merőleges vetületi vektorát $\operatorname{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$. Eszerint ha $\mathbf{e}$ egységvektor, akkor

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{e}}\mathbf{b} = (\mathbf{e}\cdot\mathbf{b})\mathbf{e}.$$

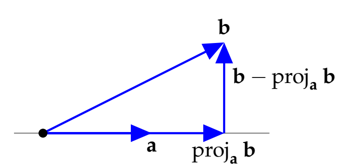
Alapvető feladat egy vektornak egy másikkal párhuzamos és rá merőleges vektorok összegére való felbontása, amit másként *merőleges összetevőkre bontásnak* nevezünk.

1.24. TÉTEL (VEKTOR FELBONTÁSA MERŐLEGES ÖSSZETEVŐKRE). *Ha* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *a sík vagy a tér két vektora, és* $\mathbf{a} \ne \mathbf{0}$, *akkor* $\mathbf{b}$*-nek az* $\mathbf{a}$ *egyenesére eső merőleges vetülete*

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}.$$

A $\mathbf{b}$*-nek az* $\mathbf{a}$ *egyenesére merőleges összetevője*

$$\mathbf{b} - \operatorname{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}.$$



1.26. ábra: Az $\mathbf{b}$ vektor felbontása az $\mathbf{a}$ vektorral párhuzamos és rá merőleges vektorok összegére.

Bizonyítás. Az első képlet az egységvektorral szorzás geometriai jelentéséről szóló 1.23. tételből következik. Legyen $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ az $\mathbf{a}$-irányú egységvektor. Ekkor

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{e}} \mathbf{b} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})\mathbf{e} = \left(\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \cdot \mathbf{b} \right) \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{|\mathbf{a}|^2} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}.$$

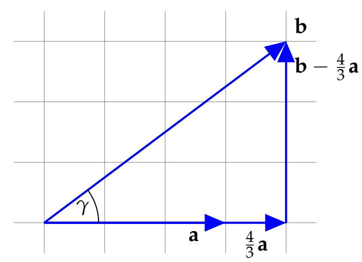
(Az utolsó egyenlőségnél kihasználtuk, hogy $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$.) Mivel $\mathbf{e}$ és $\mathbf{a}$ párhuzamosak, ezért $\operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \operatorname{proj}_{\mathbf{e}} \mathbf{b}$, ami bizonyítja első állításunkat. Az állítás második fele abból következik, hogy a két összetevő összege $\mathbf{b}$. □

1.25. példa (Merőleges összetevőkre bontás). *Az 1.24 ábrabeli* $\mathbf{b}$ *vektort bontsuk fel az* $\mathbf{a}$*-val párhuzamos és rá merőleges összetevőkre.*

Megoldás. Bár a megoldás az 1.27 ábráról is azonnal látszik, kövessük végig a számítást: az 1.20. példa szerint $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 12$, $|\mathbf{a}| = 3$, ezért

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a} = \frac{12}{9} \mathbf{a} = \frac{4}{3} \mathbf{a},$$

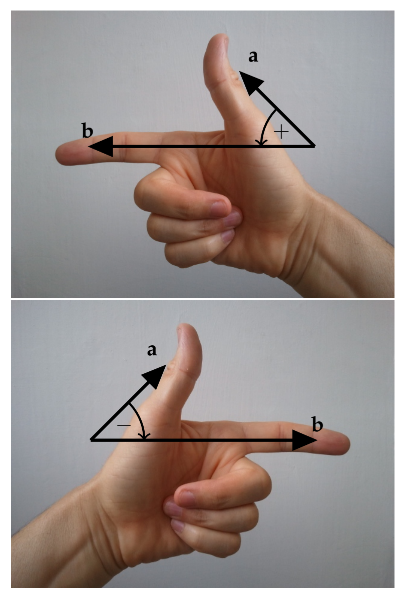
míg az $\mathbf{a}$-ra merőleges összetevő $\mathbf{b} - \frac{4}{3}\mathbf{a}$. □



1.27. ábra: Vektor felbontása merőleges összetevőkre

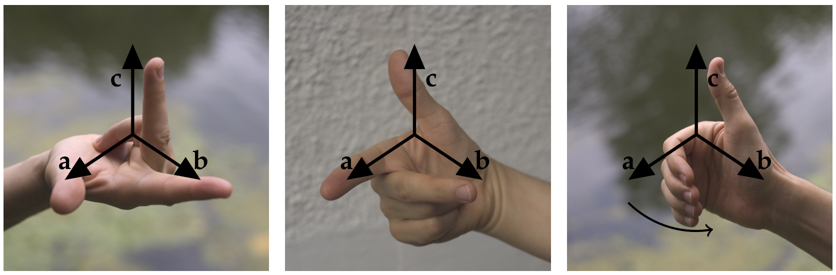
Merőlegesség és orientáció Legyenek $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egymásra merőleges nemzérus vektorok a síkban. Ekkor $\mathbf{a}$ és $-\mathbf{b}$ is merőlegesek, azaz $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle = (\mathbf{a}, -\mathbf{b})_\angle = \pi/2$. Csak az $\mathbf{a}$ ismeretében meg tudjuk-e különböztetni a $\mathbf{b}$ és $-\mathbf{b}$ vektorokat? Hasonló kérdés a térben is fölmerül: ha $\mathbf{c}$ merőleges a nem kollineáris $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok mindegyikére, akkor $-\mathbf{c}$ is. Vajon $\mathbf{c}$ és $-\mathbf{c}$ megkülönböztethető-e egymástól csak $\mathbf{a}$-hoz és $\mathbf{b}$-hez való viszonyukat tekintve?

A válaszhoz az *irányítás*, más szóval *orientáció* fogalma vezet. E fogalmat precízen később definiáljuk (ld. ???. szakasz), az alapgondolat viszont egyszerű. A síkban a két független vektorból álló párokat két osztályba sorolhatjuk aszerint, hogy a tenyérrel fölfelé fordított jobb vagy bal kezünk első két ujjával szemléltethetőek (1.28. ábra) (hüvelyk az első, mutató a második vektor).

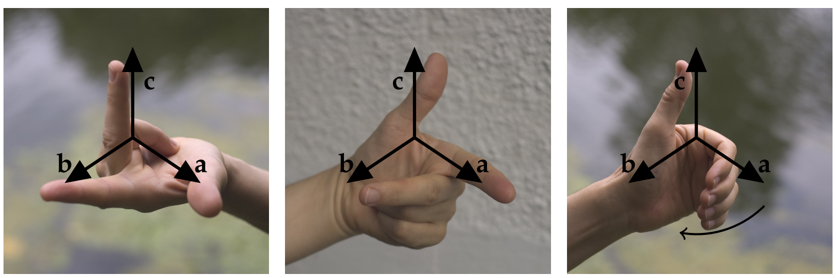


1.28. ábra: Két vektor egymáshoz való viszonya jobbrendszert (felső ábra) vagy balrendszert (alsó ábra) alkot. A közbe zárt irányított szög az előbbi esetben pozitív, utóbbiban negatív.

Hasonlóképp: a térben a független vektorokból álló hármasokat két osztályba sorolhatjuk aszerint, hogy jobb vagy bal kezünk első három ujjával szemléltethetőek (1.29. és 1.30. ábra). Kézenfekvőnek tűnik az első vektornak a hüvelyk, a másodiknak a mutató, a harmadiknak a középső ujjunkat megfeleltetni, de azokban a kultúrákban, ahol a mutató és középső ujjal mutatják a kettőt, ott a mutató-középső-hüvelyk a sorrend. Aszerint, hogy egy vektorpár a síkban, illetve egy vektorhármas a térben melyik osztályba esik, azt mondjuk, hogy *jobbrendszert*, illetve *balrendszert* alkot. Az 1.29. ábra harmadik képén látható mód (az ökölbe szoruló jobb kéz mozgása) azt is megmutatja, hogy milyen egy egyenes körül való pozitív forgás iránya. A síkban ezt azzal is ki tudjuk fejezni, hogy két független vektor szögét előjellel látjuk el, nevezetesen pozitívval, ha jobbrendszert, és negatívval, ha balrendszert alkotnak. Az így kapott szöget a két vektor *irányított szögének* nevezzük. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ irányított szögét $(\mathbf{a},\mathbf{b})_{\sphericalangle}$ jelöli. Tehát míg $(\mathbf{a},\mathbf{b})_{\angle} = (\mathbf{b},\mathbf{a})_{\angle}$, addig $(\mathbf{a},\mathbf{b})_{\sphericalangle} = -(\mathbf{b},\mathbf{a})_{\sphericalangle}$, és ha $(\mathbf{a},\mathbf{b})_{\sphericalangle} = \pi/2$, akkor $(\mathbf{a},-\mathbf{b})_{\sphericalangle} = -\pi/2$. Ez tehát a válasz a paragrafus elején feltett kérdésre.



1.29. ábra: Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok ebben a sorrendben jobbrendszert alkotnak, ha irányuk a jobb kezünkkel mutatható a mellékelt három ábra bármelyike szerint: (1) hüvelyk–mutató–középső ujj, (2) mutató–középső–hüvelykujj, (3) a hüvelyk mutatja a $\mathbf{c}$ vektort, ökölbe szoruló kezünk ujjai pedig az $\mathbf{a}$ felől a $\mathbf{b}$ felé haladnak.



1.30. ábra: Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok ebben a sorrendben balrendszert alkotnak, ha irányuk a bal kezünkkel mutatható a következők bármelyike szerint: (1) hüvelyk–mutató–középső ujj, (2) mutató–középső–hüvelykujj, (3) a hüvelyk mutatja a $\mathbf{c}$ vektort, ökölbe szoruló kezünk ujjai pedig az $\mathbf{a}$ felől a $\mathbf{b}$ felé haladnak.

Vektori szorzás A fizikában több olyan jelenség is van, melyben két térbeli vektorhoz keresünk egy mindkettőre merőleges harmadikat. Legismertebb példa a *forgatónyomaték*.

Hasson egy $\mathbf{F}$ erő egy test $\mathbf{P}$ pontjában, és legyen a test rögzítve az O pontjában. A P ponton átmenő, $\mathbf{F}$ irányú egyenesnek az O-tól való távolságát az erő karjának nevezzük. Az $\mathbf{F}$ hatására a test O körül elfordul. Ennek jellemzésére tudnunk kell a forgás tengelyét, a forgás „nagyságát”, és azt, hogy a tengely körüli két forgásirány közül melyikről van szó. Erre alkalmas lehet egy vektor – ezt nevezzük *forgatónyomatéknak* –, melynek iránya a forgástengellyel párhuzamos, hossza a forgás nagyságát írja le, és a forgástengellyel párhuzamos két vektorirány a két forgásirányhoz tartozik. Hogyan definiálható a forgatónyomaték-vektor, ha tudjuk, hogy abszolút értéke az erőkar hosszának és az erő abszolút értékének szorzata?

Az erő karja $|\overrightarrow{OP}|\sin(\overrightarrow{OP},\mathbf{F})_{\angle}$, így az $\mathbf{M}$ forgatónyomaték abszolút értéke:

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{F}||\overrightarrow{OP}|\sin(\overrightarrow{OP},\mathbf{F})_{\angle}.$$

A forgás tengelye nyilván merőleges **F**-re és $\overrightarrow{OP}$-re is, csak abban kell megegyezni, hogy az $\overrightarrow{OP}$, **F** és **M** vektorok jobb- vagy balrendszert alkossanak. A fizikusok a jobbrendszert választották.

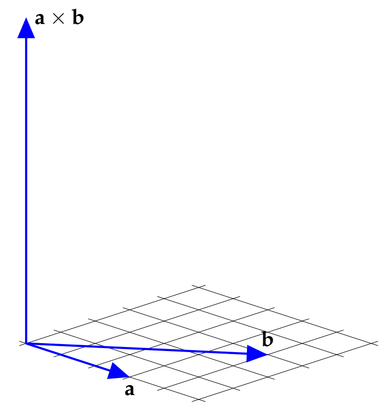
A forgatónyomaték, és több hasonló fizikai fogalom a következő definícióhoz vezet:

1.26. DEFINÍCIÓ (VEKTORI SZORZAT). *A 3-dimenziós tér két vektorának* vektori szorzatán *azt a vektort értjük, melynek*
a) abszolút értéke *a két vektor abszolút értékének és a közbezárt szög szinuszának szorzata,*
b) iránya *merőleges mindkét vektor irányára és – ha a két tényező és a szorzat egyike sem a nullvektor, akkor – az első tényező, a második tényező és a szorzat ebben a sorrendben jobbrendszert alkot.*

► E definíció bármely két 3-dimenziós vektor vektori szorzatát egyértelműen definiálja, ugyanis minden olyan esetben, amikor nem tudnánk eldönteni, hogy a vektorok jobbrendszert alkotnak-e, a szorzat a nullvektor (gondoljuk meg!).
► Az **a** és **b** vektorok vektori szorzatát $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jelöli, amit „a kereszt b"-nek olvasunk. Képletekkel megfogalmazva: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ egy vektor, melyre

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle,$$

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$, továbbá **a**, **b** és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot.



1.31. ábra: Az **a**, **b** és az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorok

1.27. PÉLDA (VEKTORI SZORZAT MEGHATÁROZÁSA). *Tegyük fel, hogy a tér két vektora 3 illetve 5 hosszú, az általuk bezárt szög koszinusza $\frac{4}{5}$, mint az 1.20. példában. Mit tudunk a vektori szorzatról?*

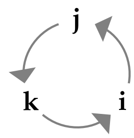
MEGOLDÁS. Ha $\cos\gamma = \frac{4}{5}$, akkor $\sin\gamma = \sqrt{1 - (\frac{4}{5})^2} = \frac{3}{5}$, így a vektori szorzat hossza $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle = 3 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 9$, iránya merőleges mindkét vektorra és **a**, **b**, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot (ld. 1.31. ábra). □

1.28. PÉLDA (**i**, **j**, **k** VEKTORI SZORZATA). *Legyen* **i**, **j**, **k** *három, páronként egymásra merőleges, ebben a sorrendben jobbrendszert alkotó egységvektor. Készítsünk művelettáblát vektori szorzataikról!*

MEGOLDÁS. Mivel $(\mathbf{i}, \mathbf{i})_\angle = 0$, ezért $|\mathbf{i} \times \mathbf{i}| = 0$, így $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$. Hasonlóan $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$.

Mivel $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = 1$ és $(\mathbf{i}, \mathbf{j})_\angle = 90°$, ezért $|\mathbf{i} \times \mathbf{j}| = 1$, azaz $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ is egységvektor. Ráadásul $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ merőleges **i**-re és **j**-re, és **i**, **j** valamint $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ jobbrendszert alkotnak épp úgy, mint **i**, **j** és **k**. Ebből következik, hogy $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$. Hasonlóképp $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$ és $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$. Ha **i**, **j**, **k** jobbrendszert alkot, akkor **j**, **i** és **k** balrendszert, így $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$. Mindezeket összefoglalva a következő művelettáblát kapjuk.

$\times$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$



E három vektor közti szorzatok könnyen megjegyezhetőek, ha egy szabályos háromszög csúcsaira írjuk őket pozitív körüljárás szerint, mint azt a táblázat melletti ábra mutatja. Ekkor két különböző vektor szorzata a harmadik, ha a két vektor pozitív körüljárás szerint követi egymást. Ha negatív körüljárás szerint követik egymást, a szorzat a harmadik vektor -1-szerese. □

1.29. TÉTEL (MIKOR $\mathbf{0}$ A VEKTORI SZORZAT?). *Két térbeli vektor vektori szorzata pontosan akkor zérusvektor, ha a két vektor párhuzamos.*

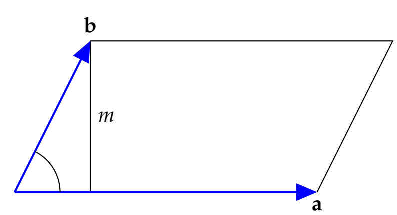
BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{a}$ vagy $\mathbf{b}$ valamelyike zérusvektor, akkor egyrészt a két vektor tekinthető párhuzamosnak, másrészt $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, az állítás tehát igaz, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy a két tényező egyike sem zérusvektor.

($\Longleftarrow$) Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ párhuzamosak (más szóval kollineárisak), akkor $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle = 0$ vagy π, tehát $\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle = 0$, így $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|0 = 0$, azaz $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

($\Longrightarrow$) Ha $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, azaz $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle = 0$, akkor $|\mathbf{a}| = 0$, $|\mathbf{b}| = 0$ vagy $\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle = 0$. Az $|\mathbf{a}| = 0$ vagy $|\mathbf{b}| = 0$ eseteket már elintéztük a bizonyítás elején, így marad a $\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle = 0$ eset. A szinusz függvénynek a $[0, \pi]$ intervallumban a 0 és a π helyen van zérushelye, tehát a két vektor vagy egyirányú, vagy ellenkező irányú, vagyis párhuzamos. □

1.30. TÉTEL (VEKTORI SZORZAT ABSZOLÚT ÉRTÉKÉNEK GEOMETRIAI JELENTÉSE). *Két vektor vektori szorzatának abszolút értéke a két vektor által kifeszített parallelogramma területének mérőszámával egyenlő.*

BIZONYÍTÁS. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített parallelogramma oldalainak hossza $|\mathbf{a}|$ és $|\mathbf{b}|$, az $\mathbf{a}$ oldalhoz tartozó magassága pedig $m = |\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle$. A parallelogramma területe $|\mathbf{a}|m = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ (1.32. ábra). □



1.32. ábra: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ megegyezik a parallelogramma területével

1.31. TÉTEL (VEKTORI SZORZÁS MŰVELETI TULAJDONSÁGAI). *Tetszőleges* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *és* $\mathbf{c}$ *vektorokra, valamint tetszőleges r valós számra igazak az alábbi összefüggések:*

a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ *(alternáló tulajdonság)*

b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ *(disztributivitás)*

c) $r(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (r\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (r\mathbf{b})$

d) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2}$

A tétel bizonyítását feladatnak tűzzük ki.

► E tétel *a)* pontja szerint a vektori szorzás *nem kommutatív*!
► Egy egyszerű példa mutatja, hogy a vektori szorzás nem is asszociatív. Az 1.28. példa eredményét használva könnyen látható, hogy

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} \neq \mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}),$$

ugyanis $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$, másrészt $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Parallelepipedon térfogata, és előjeles térfogata Az 1.30. tételben megmutattuk, hogy a vektori szorzat abszolút értéke a két vektor által kifeszített parallelogramma területét adja. Hogy számítható ki a parallelepipedon térfogata?

1.32. PÉLDA (PARALLELEPIPEDON TÉRFOGATA). *Határozzuk meg az* **a**, **b** *és* **c** *vektorok által kifeszített parallelepipedon térfogatát!*

MEGOLDÁS. Az **a** és **b** által kifeszített parallelogramma területe $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, és mivel $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges a parallelogramma síkjára, ezért a parallelepipedon magassága **c**-nek az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ egyenesére eső merőleges vetületi hosszával egyenlő. Ez az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ irányú egységvektorral való skaláris szorzással számolható. Az egységvektor

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|},$$

a magasság $|\mathbf{e} \cdot \mathbf{c}|$, és így a térfogat (azaz az alapterületszer magasság) értéke

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \left| \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} \cdot \mathbf{c} \right| = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| \,.$$

Tehát a parallelepipedon térfogata $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$. □

A térfogat tehát az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ skalár abszolút értéke. Kérdés: vajon mit jelent e skalár előjele? Ez pontosan akkor negatív, ha a **c** vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ egyenesére eső merőleges vetülete és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ellenkező irányú. Vagyis ha a **c** vektor az **a** és **b** síkjának másik oldalán van, mint az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor, azaz ha **a**, **b** és **c** balrendszert alkot!

Összefoglalva: Az **a**, **b** és **c** vektorokból képzett $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ skalár abszolút értéke a három vektor által kifeszített parallelepipedon térfogatával egyenlő, míg előjele a három vektor orientációját adja, nevezetesen pontosan akkor pozitív, ha a három vektor jobbrendszert alkot. Az is következik a fentiekből, hogy a három vektor pontosan akkor esik egy síkba, azaz pontosan akkor lineárisan összefüggők, ha $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$.

Vegyes szorzat Az előző paragrafusban megmutattuk az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ kifejezés fontosságát. Ez vezet a következő definícióhoz.

1.33. DEFINÍCIÓ (VEGYES SZORZAT). *A 3-dimenziós tér három tetszőleges* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *és* $\mathbf{c}$ *vektorából képzett*

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

kifejezést a három vektor vegyes szorzatának *nevezzük.*

- A vegyes szorzat eredménye skalár.
- Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok vegyes szorzatának szokás jelölése $\mathbf{abc}$, de mi a későbbi fejezetekben nem fogjuk használni.
- Mivel a skaláris szorzás kommutatív, ezért $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.
- A parallelepipedon térfogatára ugyanazt az értéket kell kapnunk, bármelyik oldallapot is választjuk alapnak, így e három vektorból a vektorok különböző sorrendjeivel képzett vegyes szorzatok csak előjelében térhetnek el egymástól. Mivel az előjel az orientáció függvénye, ezért – figyelembe véve az előző megjegyzést is – kapjuk, hogy

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Az ellenkező előjelű szorzatok:

$$(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b}).$$

Ezeket a vegyes szorzatra használt jelöléssel fölírva:

$$\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{acb} = -\mathbf{cba} = -\mathbf{bac}.$$

1.34. PÉLDA (VEGYES SZORZAT). *Határozzuk meg egy egységélű kocka egy csúcsból induló három lapátló-vektorának vegyes szorzatát!*

MEGOLDÁS. Jelölje a kocka egyik csúcsából induló három élvektorát $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$. E három vektor ebben a sorrendben alkosson jobbrendszert. Ekkor az előző megjegyzés szerint $\mathbf{ijk} = \mathbf{jki} = \mathbf{kij} = 1$, $\mathbf{kji} = \mathbf{jik} = \mathbf{ikj} = -1$. Mivel a vegyes szorzat egy parallelepipedon térfogatát, vagy annak ellentettjét adja, ezért ha egy szorzatban egy vektor többször is szerepel, akkor annak értéke 0. Például $\mathbf{iji} = (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$. A három lapátló-vektor: $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{k} + \mathbf{i}$. Ezek vegyes szorzata

$$\begin{aligned}((\mathbf{i}+\mathbf{j}) \times (\mathbf{j}+\mathbf{k})) \cdot (\mathbf{k}+\mathbf{i}) &= \mathbf{ijk} + \mathbf{iji} + \mathbf{ikk} + \mathbf{iki} + \mathbf{jjk} + \mathbf{jji} + \mathbf{jkk} + \mathbf{jki} \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 \\ &= 2,\end{aligned}$$

tehát a három lapátló-vektor vegyes szorzata 2. □

Feladatok

Skaláris szorzás

1.14. Mutassuk meg, hogy $|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2$ pontosan akkor áll fenn, ha **a**, **b** és **c** három egymásra páronként merőleges vektor.

1.15. Igazoljuk, hogy

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} \neq \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}).$$

Merőlegesség és orientáció: vektori szorzás Vektori szorzat

1.16. Tekintsünk egy egységélű kockát, melynek egyik csúcsát jelölje P. Számítsuk ki a P-ből induló

a) valamelyik két lapátló-vektor,
b) egyik lapátló- és a testátló-vektor

skaláris szorzatát, valamint a P-ből induló

c) valamelyik élvektor és egy vele egy lapon lévő lapátló-vektor,
d) valamelyik élvektor és a vele nem egy lapon lévő lapátló-vektor

vektori szorzatát.

1.17. Mutassuk meg, hogy ha **u** merőleges a **v** és **w** vektorokra, akkor merőleges minden lineáris kombinációjukra is.

1.18. Három lineárisan független vektornak hány sorrendje van? E sorrendek közül hány alkot jobb- és hány balrendszert?

1.19. [Szögfelező] Legyenek **a** és **b** nemzérus vektorok. Mutassuk meg, hogy a $|\mathbf{b}|\mathbf{a}+|\mathbf{a}|\mathbf{b}$ vektor felezi **a** és **b** szögét!

1.20. [Háromszög szögfelezője] Az előző feladat eredményét felhasználva mutassuk meg, hogy a háromszög egyik szögének szögfelezője a szemközti oldalt a két szomszédos oldal hosszának arányában osztja fel.

1.21. [Mit cserél föl a tükör?] Hogy lehet az, hogy a tükör fölcseréli a jobbat a ballal, de nem cseréli föl a föntet a lenttel?

Projekt: ekvivalencia reláció

Egy X halmazon értelmezett *reláción* (pontosabban *bináris reláción*) az X elempárjainak egy R halmazát értjük. Ha egy (a, b) pár benne van ebben a halmazban, azt mondjuk, hogy a az R relációban van b-vel, és úgy jelöljük, hogy $a\ R\ b$. Például, ha X az összes valaha élt ember halmaza, akkor az összes olyan (a, b) emberpár halmaza, ahol a anyja b-nek, egy reláció. Ez a köznyelvből is ismert anya-gyermek reláció. Egy matematikai példa: ha X a valósok halmaza, és R azokból az (a, b) párokból áll, melyekre a kisebb vagy egyenlő, mint b, akkor R egy reláció, melyet a valósok rendezési relációjának nevezünk. E reláció szokásos jele $\leq$, így ha $(a, b) \in R$, akkor az $a \leq b$ jelölést használjuk.

Az X halmazon értelmezett *ekvivalencia reláció* egy olyan reláció, mely az X halmaz elemeinek egy osztályozását írja le. Ez azt jelenti, hogy ha az X halmazt páronként kizáró részhalmazok uniójára bontjuk, azaz megadjuk az X elemeinek egy *osztályozását*, vagy más szóval X egy *particionálását*, akkor létezik egy reláció, melyben az $a, b \in X$ elemek pontosan akkor vannak relációban, ha egy osztályba (partícióba) tartoznak. Az így kapott relációnak van három olyan tulajdonsága, melynek csak az ilyen módon megkapható relációk felelnek meg.

1.35. TÉTEL (EKVIVALENCIA RELÁCIÓ). ....

1.22. [Szabad vektor fogalma] Blabla

1.23. [Vektor iránya] Blabla

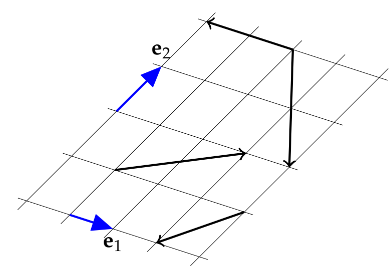
Vektorok koordinátás alakban

A koordináták bevezetésével egyrészt új algebrai eszközökhöz jutunk a vektorok és a különféle geometriai alakzatok vizsgálatában, másrészt lehetővé válik a vektor fogalmának kiterjesztése. Így jutunk a sokdimenziós terek fogalmához, ami nélkülözhetetlen a közgazdaságtanban, az internetes keresők matematikájában, vagy véges struktúrák fölötti változatában a kódelméletben és a kriptográfiában.

René Descartes (Renatus Cartesianus) (1596–1650) francia filozófus és matematikus, a modern filozófia atyja, az analitikus geometria egyik megalkotója. Filozófiáját a puszta hitre alapozott állításokkal szemben a racionális érvelések útján kívánta fölépíteni (lásd *descartesi kételkedés* és „gondolkodom, tehát vagyok”). Orvostudományt és jogot tanult, végül hadmérnöki képesítést szerzett. Több háborúban is részt vett. 1619-ben egy Magyarországot is érintő hosszú útján egy Ulm melletti parasztházban három álmot látott, melyek megfejtése „egy csodálatos tudományhoz” vezette, ami filozófiája alapjává vált.

Descartes-féle koordinátarendszer Descartes 1637-ben *La Géométrie* című művében egy szép ötlettel összekapcsolta a geometriát az algebrával. Alapgondolata az volt, hogy a geometria alapelemei (pl. pontok) és a valós számok/számpárok/számhármasok közt kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés hozható létre, így bizonyos geometriai alakzatok algebrai egyenletekkel leírhatóvá és vizsgálhatóvá válnak.

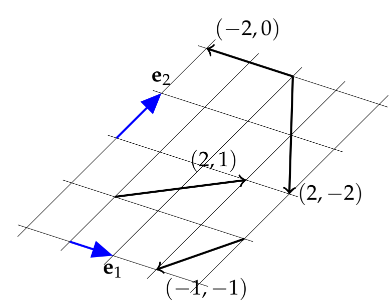
Az 1.11. tétel szerint a sík bármely $\mathbf{v}$ vektora felírható két adott lineárisan független $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ vektor lineáris kombinációjaként, és e felírás egyértelmű. Ha e lineáris kombináció $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$ alakú, akkor a $\mathbf{v}$ vektorhoz a (v_1, v_2) számpárt rendeljük, amit a $\mathbf{v}$ vektor *koordinátás alakjának* nevezünk, a v_1 és v_2 skalárokat pedig a $\mathbf{v}$ *koordinátáinak* nevezzük. Azt mondjuk, hogy az $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ vektorpár e koordinátázási rendszer – egyszerűbben *koordinátarendszer* – *bázisa*, az $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ vektorok a *bázisvektorok* vagy *alapvektorok*. Tetszőleges vektor koordinátáinak meghatározásához elég a bázisvektorokat ismerni.



1.33. ábra: Mik a vektorok koordinátái?

1.36. PÉLDA (VEKTOROK KOORDINÁTÁI). *Határozzuk meg az 1.33. ábrán megadott vektoroknak – az* $\mathbf{e}_1$ *és* $\mathbf{e}_2$ *vektorokra, mint bázisra vonatkozó – koordinátáit!*

MEGOLDÁS. A megoldás könnyen leolvasható az 1.34. ábráról. Áttekinthetőbb, ha az összes vektort egyetlen pontból indítjuk. Ezt mutatja az 1.35. ábra. □



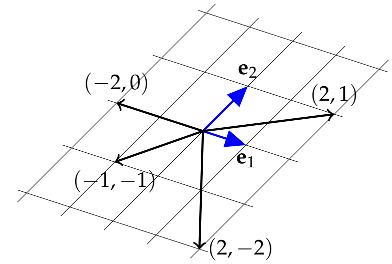
1.34. ábra: A megoldás

A koordinátarendszer a 3-dimenziós térben is hasonló módon építhető fel. Az 1.12. tétel szerint a tér bármely $\mathbf{v}$ vektora felírható három adott lineárisan független $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ és $\mathbf{e}_3$ vektor lineáris kombinációjaként, és e felírás egyértelmű. Ha e lineáris kombináció $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$ alakú, akkor a $\mathbf{v}$ vektorhoz a (v_1, v_2, v_3) számhármast rendeljük, amit a $\mathbf{v}$ vektor *koordinátás alakjának* nevezünk, a v_1, v_2 és v_3 skalárokat pedig a $\mathbf{v}$ *koordinátáinak* nevezzük, a *bázis* pedig az $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ vektorhármas.

Sőt, a koordinátázás az 1-dimenziós térben is megvalósítható: ha $\mathbf{e}$ egy nemnulla vektor (tehát lineárisan független vektorrendszer!), akkor bármely vele párhuzamos $\mathbf{v}$ vektor egyértelműen felírható $\mathbf{v} = v\mathbf{e}$

alakban. E v skalár lesz a $\mathbf{v}$ koordinátás alakja (a zárójel használata itt szükségtelen). Így a $\mathbf{v} \leftrightarrow v$ hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít a vektorok és a skalárok közt.

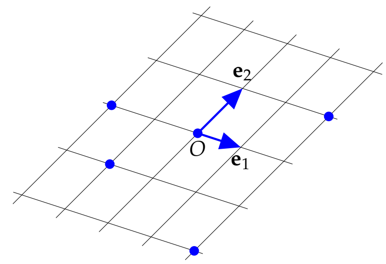
Ha kijelölünk egy pontot az egyenesen/síkban/térben – ez lesz az origó –, akkor az egyenes/sík/tér pontjai és a helyvektorok végpontjai közti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetéssel egyúttal a pontok is koordinátát kapnak.



1.35. ábra: A megoldás helyvektorokkal ábrázolva.

1.37. PÉLDA (PONTOK KOORDINÁTÁI). *Határozzuk meg az 1.36. ábrán kijelölt pontok – megadott bázisvektorokra és origóra vonatkozó – koordinátáit!*

MEGOLDÁS. E feladat megoldása lényegében azonos az előzőével, minthogy a kijelölt pontokba mutató helyvektorok megegyeznek az ott megadott vektorokkal (ld. 1.37. ábra). □

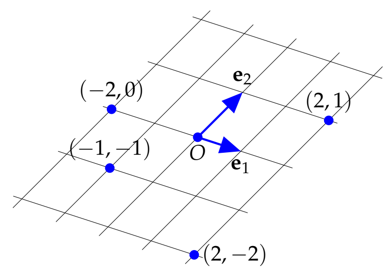


1.36. ábra: Mik a pontok koordinátái?

A helyvektorok és a pontok közti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést a jelölésben is kifejezzük azzal, hogy nem teszünk különbséget a vektor és a pont koordinátás alakja közt, azaz a $\mathbf{v} = (a, b)$ vektorhoz adott origó mellett rendelt pontot is (a, b) jelöli. Ha a pontnak nevet is adunk, pl. e pont a P pont, akkor a $P(a, b)$ jelölés a nevet és a koordinátákat is megadja. Ekkor a helyvektort $\overrightarrow{OP}$ is jelölheti. Tehát $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$. Szokás a vektorok koordinátás alakját úgynevezett *oszlopvektor* alakba is írni, mi e könyvben ekkor kerek helyett szögletes zárójelet használunk, például:

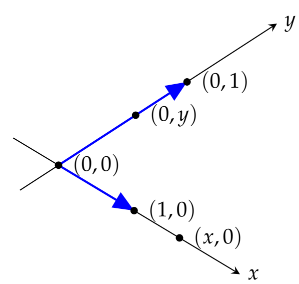
$$\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

E jelölés előnyeivel hamarosan találkozunk.



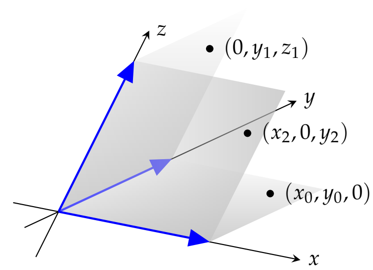
1.37. ábra: Pontok és koordinátáik

Látható, hogy ha egy pont az első tengelyen van, és azon az egyenesen x az 1-dimenziós koordinátája, akkor síkbeli koordinátás alakja $(x, 0)$ lesz. Hasonlóképp a második tengely minden pontjának $(0, y)$ a koordinátás alakja. Az origóé $(0, 0)$ (ld. 1.38. ábra). Az alapvektorok koordinátás alakja $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ és $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$.



1.38. ábra: Pontok a koordinátarendszer tengelyein.

Hasonlóképp a 3-dimenziós esetben a koordinátatengelyekre eső pontok 3-dimenziós koordinátás alakja $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$, illetve $(0, 0, z)$ attól függően, hogy melyik tengelyről van szó. Az origón átmenő és 2 tengelyt tartalmazó síkokat *koordinátasíkoknak* nevezzük. Ezekből is három van. Könnyen látható, hogy a koordinátasíkok pontjainak alakja $(x, y, 0)$, $(x, 0, z)$, illetve $(0, y, z)$. Az origóé $(0, 0, 0)$, míg az alapvektoroké $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ (ld. 1.39. ábra).



1.39. ábra: Pontok a koordinátasíkokon

Műveletek koordinátás alakban megadott vektorokkal Legyen adva a térben egy koordinátarendszer, és abban két tetszőleges $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektor. E paragrafusban megkeressük a vektorműveletek koordinátás alakját. A kérdés tehát az, hogy hogyan kapható meg $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $c\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ koordinátás alakja.

Mindegyik műveletnél felhasználjuk a vektoroknak a bázisvektorok lineáris kombinációjaként való előállítását. Az adott két vektor összege

$$\begin{aligned}\mathbf{u}+\mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)\\ &= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) + (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3)\\ &= (u_1+v_1)\mathbf{e}_1 + (u_2+v_2)\mathbf{e}_2 + (u_3+v_3)\mathbf{e}_3\\ &= (u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3).\end{aligned}$$

Hasonló képlet adódik a különbségre

$$\mathbf{u}-\mathbf{v} = (u_1, u_2, u_3) - (v_1, v_2, v_3) = (u_1-v_1, u_2-v_2, u_3-v_3).$$

A skalárral való szorzás is a koordinátánként való végrahajtás lehetőségét mutatja:

$$\begin{aligned}c\mathbf{u} &= c(u_1, u_2, u_3) = c(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3)\\ &= cu_1\mathbf{e}_1 + cu_2\mathbf{e}_2 + cu_3\mathbf{e}_3\\ &= (cu_1, cu_2, cu_3).\end{aligned}$$

Összefoglalva tehát a következő állítást kapjuk:

1.38. ÁLLÍTÁS (VEKTORMŰVELETEK KOORDINÁTÁS ALAKJA). *Adva van a térben egy koordinátarendszer, és abban két tetszőleges* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *és* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *vektor, valamint egy tetszőleges* $c \in \mathbb{R}$ *valós szám. Ekkor a vektorok összegének, különbségének és skalárszorosának koordinátás alakja rendre*

$$\begin{aligned}\mathbf{u}+\mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3),\\ \mathbf{u}-\mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) - (v_1, v_2, v_3) = (u_1-v_1, u_2-v_2, u_3-v_3),\\ c\mathbf{u} &= c(u_1, u_2, u_3) = (cu_1, cu_2, cu_3).\end{aligned}$$

Az oszlopvektor jelölést használva

$$\mathbf{u}\pm\mathbf{v} = \begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_1\pm v_1\\u_2\pm v_2\\u_3\pm v_3\end{bmatrix}, \quad c\mathbf{u} = c\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}cu_1\\cu_2\\cu_3\end{bmatrix}.$$

A síkbeli vektorokra hasonló állítások igazak, csak két koordinátával. Érdekesebb a helyzet a skaláris szorzással. Kezdjük két síkbeli vektorral.

1.39. PÉLDA (SKALÁRIS SZORZÁS KOORDINÁTARENDSZERBEN). *Tekintsünk egy olyan síkbeli koordinátarendszert, ahol az első alapvektor hossza* 1*, a másodiké* 2*, és a kettőjük közti szög* $\pi/3$*. Számítsuk ki az* $\mathbf{a} = (1, 1)$ *és a* $\mathbf{b} = (-5/2, 1)$ *vektorok skaláris szorzatát.*

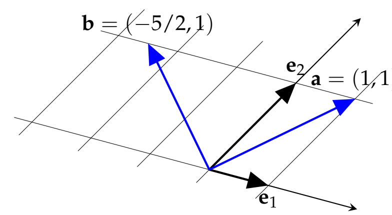
MEGOLDÁS. Az alapvektorok hosszát és szögét ismerve ki tudjuk számítani az alapvektorok skaláris szorzatait:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1, \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 2^2 = 4, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 1 \cdot 2 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 1.$$

Ezt fölhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \cdot (-\frac{5}{2}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \\ &= -\frac{5}{2}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + (1 - \frac{5}{2})\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \\ &= -\frac{5}{2} - \frac{3}{2} + 4 \\ &= 0,\end{aligned}$$

tehát a két vektor merőleges egymásra (ld. az 1.40. ábrát).



1.40. ábra: Két vektor skaláris szorzata

Érdekességként meghatározzuk e koordinátarendszerben a skaláris szorzás általános képletét:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2) \cdot (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) \\ &= u_1v_1\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + (u_1v_2 + u_2v_1)\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + u_2v_2\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \\ &= u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + 4u_2v_2.\end{aligned}$$

Ebből látható, hogy a skaláris szorzat koordinátás alakja függ a koordinátarendszertől is. □

A derékszögű koordinátarendszer A természeti törvények különös fontosságot adnak az egymásra merőleges irányoknak, ezért például igen gyakran érdemes olyan koordinátarendszert választani, amelyben az alapvektorok merőlegesek, más szóval *ortogonálisak* egymásra. A bázisvektorok szöge mellett azok hosszát is érdemes standardizálni, nevezetesen egységnyi hosszúnak választani, így mindegyik koordináta egyúttal távolságot is jelent. Az egységvektorokból álló ortogonális bázist *ortonormáltnak* nevezzük.

Az egységes tárgyalás érdekében a bázisvektorok körüljárását is előírhatjuk: általánosan elterjedt szokás a jobbrendszert választani. Az így konstruált bázis vektorait síkban gyakran **i**, **j**, térben **i**, **j** és **k** jelöli.

A két és háromdimenziós térben a skaláris szorzat egyszerű alakot ölt, ha a koordinátarendszer alapvektorai ortonormáltak.

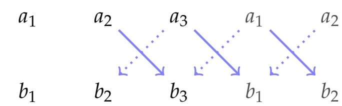
1.40. ÁLLÍTÁS (SKALÁRIS SZORZAT ORTONORMÁLT KOORDINÁTARENDSZERBEN). *A síkbeli* $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ *és* $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$*, illetve a térbeli* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *és* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *vektorok skaláris szorzata ortonormált koordinátarendszerben*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2, \text{ illetve } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

BIZONYÍTÁS. A síkbeli esetben kihasználjuk, hogy $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$ és $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}) \cdot (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}) \\ &= u_1v_1\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + (u_1v_2 + u_2v_1)\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + u_2v_2\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} \\ &= u_1v_1 + u_2v_2 \end{aligned}$$

A térbeli eset hasonlóan bizonyítható. □



1.41. ábra: A vektori szorzat kiszámítása a két vektor koordinátáiból: írjuk a két vektort egymás alá, majd az első két koordinátát másoljuk a vektorok végére, végül az X alakba rakott nyílpároknál a ↘ nyíl végein lévő számok szorzatából vonjuk ki a ↙ szerinti szorzatot. Az eredmény:

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

Megjegyezzük, hogy később a determinánsok segítségével is egy lényegében azonos, könnyen megjegyezhető alakot kapunk:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

1.41. ÁLLÍTÁS (VEKTORI SZORZAT ORTONORMÁLT KOORDINÁTARENDSZERBEN). *A térbeli* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *és* $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *vektorok vektori szorzata derékszögű koordinátarendszerben*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

BIZONYÍTÁS. Az alapvektorok egymással való vektori szorzatait már kiszámoltuk az 1.28. példában. Kihasználva, hogy $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \ldots$, kapjuk hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\ &= a_2b_3\mathbf{j} \times \mathbf{k} + a_3b_2\mathbf{k} \times \mathbf{j} + a_3b_1\mathbf{k} \times \mathbf{i} + a_1b_3\mathbf{i} \times \mathbf{k} + a_1b_2\mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_2b_1\mathbf{j} \times \mathbf{i} \\ &= a_2b_3\mathbf{i} - a_3b_2\mathbf{i} + a_3b_1\mathbf{j} - a_1b_3\mathbf{j} + a_1b_2\mathbf{k} - a_2b_1\mathbf{k} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1). \end{aligned}$$

□

1.42. PÉLDA (PARALLELOGRAMMA TERÜLETE). *Mutassuk meg, hogy az* (a, b) *és a* (c, d) *vektorok által kifeszített parallelogramma területe*

$$|ad - bc|.$$

Mi a jelentése az $ad - bc$ *előjelének?*

MEGOLDÁS. Két 3-dimenziós vektor által kifeszített parallelogramma területe a vektori szorzatuk abszolút értéke. Ágyazzuk be a megadott két vektort a tér egyik koordinátasíkjába, tekintsük például az $(a, b, 0)$ és a $(c, d, 0)$ vektorokat. Vektori szorzatuk

$$(a, b, 0) \times (c, d, 0) = (0, 0, ad - bc),$$

ennek abszolút értéke $|ad - bc|$.

Mivel az $(a, b, 0)$, $(c, d, 0)$ és $(0, 0, ad - bc)$ vektorok jobbrendszert alkotnak, ezért $ad - bc$ pontosan akkor pozitív, ha a síkban az (a, b) és a (c, d) vektorok jobbrendszert alkotnak, és $ad - bc$ pontosan akkor negatív, ha az (a, b) és a (c, d) vektorok balrendszert alkotnak (gondoljuk meg!). □

Az $\mathbb{R}^n$ halmaz Láttuk, hogy 2-dimenziós, illetve 3-dimenziós vektorjellegű mennyiségek leírhatók egy rendezett számpárral, illetve számhármassal. Izgalmas a fordított helyzet, amikor legalább 4, de akár több millió szorosan összefüggő adatból képzett, rendezett szám-n-essel dolgozunk. Vajon értelmes dolog-e e szám-n-eseket egy n-dimenziós tér vektorainak, vagy pontjainak tekinteni? És van-e értelme a 2- és 3-dimenziós térben használt fogalmak általánosításának n dimenzióra? A válasz mindegyik kérdésre határozott igen, amit a fizika 4-dimenziós tér-idő fogalma, számtalan gazdasági, vagy internettel kapcsolatos probléma megoldása fényesen bizonyít.

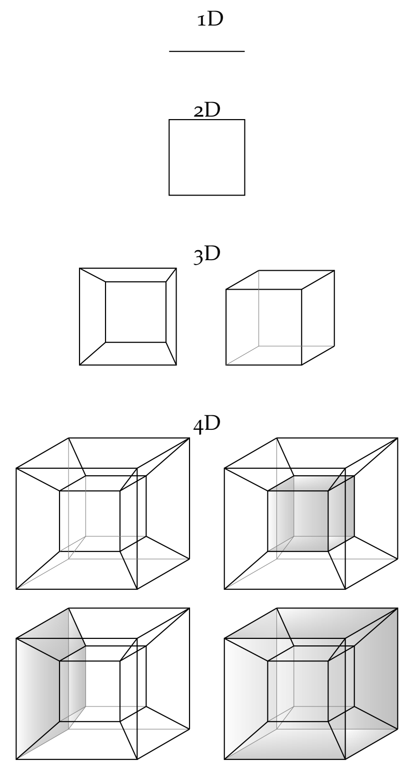
1.43. DEFINÍCIÓ. *Egy tetszőleges H halmaz elemeiből képzett rendezett elem-n-esek halmazát H^n-nel jelöljük.*

Például ha $H = \{0, 1\}$, akkor H^3 a H elemeiből képzett rendezett elemhármasok halmaza, azaz:

$$\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}.$$

A fenti jelölésnek megfelelően $\mathbb{R}^n$ *a valós számokból képzett rendezett szám-n-esek halmazát jelöli.* Eszerint a sík pontjait és vektorait $\mathbb{R}^2$, a térét $\mathbb{R}^3$ elemeivel koordinátáztuk. Később $\mathbb{R}^n$ elemein vektorműveleteket fogunk bevezetni, és $\mathbb{R}^n$-ről, mint vektortérről fogunk beszélni. Hasonlóképp, $\mathbb{R}^n$-t geometriai vagy ponttérnek fogjuk tekinteni, ha elemeire, mint pontokra gondolunk, és köztük geometriai műveleteket végezünk. E sokféleség sosem fog gondot okozni: $\mathbb{R}^n$ szerepét mindig az fogja meghatározni, hogy mit teszünk elemeivel, vagyis a szám-n-esekkel.

Az $\mathbb{R}^n$ megismerésében az *analógia* fonalán haladunk, a 2- és 3-dimenziós tér fogalmait fogjuk átvinni, általánosítani n dimenzióra. Ez az analógia fog segíteni abban, hogy valamit „lássunk” n dimenzióban is (ha nem is olyan jól, mint 3 dimenzióban). Példaként az analógiára egy 4-dimenziós kocka 2-dimenziós vetületét mutatjuk az 1.42. ábrán.



1.42. ábra: 4-dimenziós kocka ábrázolása 2-dimenzióban. A 0-dimenziós „kocka” egyetlen pontból áll, az 1-dimenziós kockát két 0-dimenziós határolja, azaz ez egy szakasz. A 2-dimenziós „kockát”, azaz a négyzetet minden tengelyirányból két-két egybevágó 1-dimenziós „kocka” határolja (azaz összesen négy), míg a 3-dimenziós kockát minden tengelyirányból két-két négyzet (azaz összesen hat). A 3-dimenziós kocka ábrázolása 2-dimenzióban csak a határoló négyzetek torzításával oldható meg. A 4-dimenziós kockát mind a négy tengelyirányból két-két 3-dimenziós kocka határolja, összesen nyolc. Az ábrán három ilyen 3-dimenziós kockát kiszíneztünk.

Vektorok összeadása és skalárral szorzása $\mathbb{R}^n$-ben A 2- és 3-dimenziós vektorok műveleteinek koordinátás alakja az összeadás, kivonás és skalárral szorzás esetén analóg módon átvihető az n-dimenziós vektorokra.

1.44. DEFINÍCIÓ (VEKTORMŰVELETEK $\mathbb{R}^n$-BEN). *Legyen $c \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges valós, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ az $\mathbb{R}^n$ tér két tetszőleges vektora. E két vektor összegét és egyikük c-szeresét a következő képletekkel definiáljuk:*

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$
$$c\mathbf{u} = (cu_1, cu_2, \ldots, cu_n).$$

Összefoglaljuk e műveletek legfontosabb tulajdonságait. Ezekre többször is hivatkozni fogunk a későbbiekben.

1.45. TÉTEL (AZ ÖSSZEADÁS ÉS SKALÁRRAL SZORZÁS TULAJDONSÁGAI). *Legyen* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *és* $\mathbf{w}$ *az* $\mathbb{R}^n$ *három tetszőleges vektora, és legyen* c, d *két teszőleges valós, jelölje* $\mathbf{0}$ *a* $(0, 0, \ldots, 0)$ *vektort és* $-\mathbf{u}$ *a* $(-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$ *vektort. Ekkor*

a)	$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$	*a + művelet nem vezet ki* $\mathbb{R}^n$*-ből*
b)	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$	*a művelet fölcserélhető (kommutatív)*
c)	$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{v} + \mathbf{u}) + \mathbf{w}$	*csoportosítható (asszociatív)*
d)	$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$	*zérusvektor*
e)	$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$	*ellentett vektor*
f)	$c\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$	*e szorzás nem vezet ki* $\mathbb{R}^n$*-ből*
g)	$c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$	*a két szorzás kompatibilis*
h)	$c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$	*disztributív*
i)	$(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$	*disztributív*
j)	$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$	*szorzás* 1*-gyel*

E tíz tulajdonság később kitüntetett szerepet fog játszani, ezért elkülönítjük a tovább felsorolandóktól:

1) $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$

2) $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$

3) $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$

4) a skalár hátra is írható, azaz $c\mathbf{u} = \mathbf{u}c$ *és így* $\mathbf{u}/c = \frac{1}{c}\mathbf{u}$

► E tulajdonságok mindegyike könnyen visszavezethető a valós számok algebrai tulajdonságaira, ezért ezek ellenőrzését (bizonyítását) az Olvasóra hagyjuk. Mintaként megmutatjuk a *b)* bizonyítását:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) \\
&= (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \ldots, v_n + u_n) \\
&= \mathbf{v} + \mathbf{u}.
\end{aligned}$$

► Az *a)–e)* tulajdonságok az összeadás, az *f)–j)* tulajdonságok a skalárral szorzás tulajdonságait írják le. Mindkét csoport első tulajdonsága csak annyit mond, hogy a művelet eredménye is ugyanabba a vektorhalmazba, azaz $\mathbb{R}^n$-be esik, ahová a műveletben szereplő vektor való.

1.46. PÉLDA. *Mutassuk meg, hogy az* $\mathbb{R}^n$*-beli* $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$,$\ldots$, $\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$ *vektorok lineárisan függetlenek, és hogy* $\mathbb{R}^n$ *minden vektora egyértelműen előáll ezek lineáris kombinációjaként!*

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{e}_1$ biztosan nem áll elő a többi vektor lineáris kombinációjaként, hisz a többi vektor első koordinátája 0, így azok bármely lineáris kombinációjában is 0 az első koordináta, $\mathbf{e}_1$-ben pedig 1. Hasonlóan igazolható, hogy egyik $\mathbf{e}_i$ sem áll elő a többi vektor lineáris kombinációjaként ($i = 2, 3, \ldots, n$). A megadott vektorok tehát lineárisan függetlenek.

Mivel az i-edik koordináta egyedül csak az $\mathbf{e}_i$ vektorban 1, a többiben 0, ezért ha egy tetszőleges $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ vektor előáll az $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként, akkor abban $\mathbf{e}_i$ együtthatója csak v_i lehet. Másrészt az is világos, hogy

$$(v_1, v_2, \ldots, v_n) = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n.$$

Ezzel igazoltuk, hogy $\mathbb{R}^n$ minden vektora egyértelműen áll elő az $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként. □

Lineáris kombináció, lineáris függetlenség, lineáris összefüggőség Hiába definiáltuk vektorok lineáris függetlenségének fogalmát tetszőleges számú vektorból álló vektorhalmazra, láttuk, hogy a 3-dimenziós térben legföljebb csak 3 vektor lehet lineárisan független. Viszont az $\mathbb{R}^n$ térben találtunk n lineárisan független vektort is.

Az 1.10. definíció szerint egy legalább kételemű vektorrendszer lineárisan független, ha mindegyik vektor független a többitől, azaz egyik sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként, egyetlen vektor pedig lineárisan független, ha nem a zérusvektor. Ez nehézkes feltétel, hisz mindegyik vektorra külön ellenőrizni kell, ezért egy könnyebben ellenőrizhető, de ekvivalens feltételt keresünk. A háromdimenziós térben láttuk, hogy ha három vektor független, akkor a tér bármely vektora *egyértelműen* előáll lineáris kombinációjukként. Ez igaz a nullvektorra is. A nullvektor egyféleképp biztosan előáll: a három vektor nullákkal vett lineáris kombinációjaként. Ezt nevezzük a nullvektor triviális előállításának. És a fentiek szerint más előállítása nincs is, ha a három vektor lineárisan független. Ez az alapja a következő tételnek:

1.47. TÉTEL (LINEÁRIS FÜGGETLENSÉG). *Tetszőleges $\mathbb{R}^n$-beli $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ vektorrendszerre az alábbi két állítás ekvivalens:*

1. $\mathcal{V}$ lineárisan független, *azaz $k > 1$ esetén egyik vektora sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként, $k = 1$ esetén pedig a vektor nem a zérusvektor.*
2. *A zérusvektor csak egyféleképp – a triviális módon – áll elő $\mathcal{V}$ lineáris kombinációjaként. Másként fogalmazva, a c_1, $c_2, \ldots, c_k$ skalárokkal vett lineáris kombináció csak akkor lehet a nullvektor, azaz*

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

csak akkor állhat fenn, ha

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0.$$

BIZONYÍTÁS. Először tegyük fel, hogy a vektorrendszer csak egyetlen $\mathbf{v}$ vektorból áll. Ekkor a tétel azt állítja, hogy e vektor pontosan akkor lineáris független, azaz pontosan akkor nem a nullvektor, ha a $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$ csak $c = 0$ esetén állhat fenn. Ez nyilvánvaló, hisz ha $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ és $c \neq 0$, akkor $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sem állhat fenn. A továbbiakban tegyük fel, hogy a vektorrendszer legalább két vektorból áll.

($\Longleftarrow$) Megmutatjuk, hogy ha $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ csak $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$ esetén állhat fenn, akkor semelyik $\mathbf{v}_i$ vektor sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként ($i = 1, 2, \ldots, k$). Tegyük fel indirekt módon, hogy valamelyik vektor – például a $\mathbf{v}_1$ – kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, azaz

$$\mathbf{v}_1 = d_2\mathbf{v}_2 + \ldots + d_k\mathbf{v}_k,$$

vagyis átrendezés után

$$(-1)\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \ldots + d_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Mivel $\mathbf{v}_1$ együtthatója nem 0, ezért feltevésünkkel ellentmondásban előállítottuk a nullvektort olyan lineáris kombinációként, melyben nem minden együttható 0. Ez az ellentmondás bizonyítja az állítást.

($\Longrightarrow$) Megmutatjuk, hogy ha a vektorrendszer egyik vektora sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként, akkor a egyedül csak a csupa zérus együtthatójú lineáris kombinációja lehet zérusvektor. Ismét indirekt módon bizonyítunk: tegyük fel, hogy van olyan – nem csupa 0 együtthatójú – lineáris kombináció, mely a nullvektorral egyenlő, azaz

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

de valamelyik együttható – például a c_1 – nem 0. Ekkor $\mathbf{v}_1$ kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\mathbf{v}_2 - \ldots - \frac{c_k}{c_1}\mathbf{v}_k,$$

ami bizonyítja az állítást. □

Egy vektorrendszert *lineárisan összefüggőnek* nevezünk, ha nem független, azaz egyelemű vektorrendszer esetén ha az a vektor a zérusvektor, többelemű vektorrendszer esetén pedig ha van olyan vektora, mely kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Az előző tétel szerint ez azzal ekvivalens, hogy a vektorrendszernek van olyan zérusvektort adó lineáris kombinációja, melyben nem mindegyik együttható zérus. A lineáris összefüggőség definíciója kicsit élesíthető:

1.48. TÉTEL (LINEÁRIS ÖSSZEFÜGGŐSÉG). *Egy nullvektortól különböző elemekből álló, legalább kételemű $\mathbb{R}^n$-beli $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha van olyan $t \geq 2$ index, hogy $\mathbf{v}_t$ a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots$, $\mathbf{v}_{t-1}$ vektorok lineáris kombinációja.*

Másként fogalmazva, ha egy nullvektort nem tartalmazó vektorrendszerben találunk olyan vektort, mely a többi lineáris kombinációja, akkor olyat is találunk, mely sorrendben csak az őket megelőző vektor(ok) lineáris kombinációja.

BIZONYÍTÁS. Legyen t az a legkisebb egész, melyre a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots$, $\mathbf{v}_t$ vektorok már összefüggők. Mivel $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, ezért az első vektor nem lehet összefüggő, ezért $t \geq 2$. E vektorok összefüggősége miatt vannak olyan c_i konstansok, melyekkel

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_t\mathbf{v}_t = \mathbf{0}.$$

Biztos, hogy $c_t \neq 0$, különben már a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots$, $\mathbf{v}_{t-1}$ vektorok is lineáris összefüggők lennének, és ez ellentmond t definíciójának. Így

$$\mathbf{v}_t = \frac{-c_1}{c_t}\mathbf{v}_1 + \frac{-c_2}{c_t}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{-c_{t-1}}{c_t}\mathbf{v}_{t-1},$$

ami bizonyítja, hogy összefüggő vektorrendszerben létezik ilyen vektor. Az állítás másik fele definíció szerint igaz, hisz ha létezik ilyen $\mathbf{v}_t$ vektor, akkor ez valóban lineáris kombinációja az összes többi vektornak. □

Skaláris szorzás $\mathbb{R}^n$-ben A skaláris szorzást először abból az alakból általánosítjuk, amelyet a 2- és 3-dimenziós térben ortonormált bázis esetén láttunk. A tetszőleges bázis esetére való általánosításra később térünk vissza.

1.49. DEFINÍCIÓ (SKALÁRIS SZORZÁS $\mathbb{R}^n$-BEN). *Legyen* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *és* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *az* $\mathbb{R}^n$ *tér két tetszőleges vektora. Skaláris szorzatukon a következő kifejezést értjük:*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.$$

1.50. TÉTEL (A SKALÁRIS SZORZÁS TULAJDONSÁGAI). *Legyen* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *és* $\mathbf{w}$ *az* $\mathbb{R}^n$ *három tetszőleges vektora, és legyen* c *egy teszőleges valós. Ekkor*

a)	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$	*a művelet fölcserélhető (kommutatív)*
b)	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$	*disztributív*
c)	$(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$	*a két szorzás kompatibilis*
d)	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ *és* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ *pontosan akkor teljesül, ha* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.	

BIZONYÍTÁS. A bizonyítás itt is igen egyszerű, ezért csak az *a)* pontét mutatjuk meg, a többit az Olvasóra hagyjuk:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n \\ &= v_1u_1 + v_2u_2 + \cdots + v_nu_n \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}.\end{aligned}$$

□

Távolság és szög $\mathbb{R}^n$-ben Két 2- vagy 3-dimenziós vektor (végpontja) távolságának, és szögének a skaláris szorzatukkal való kapcsolatát használjuk e fogalmaknak a magasabb dimenziós terekben való definíciójához.

1.51. DEFINÍCIÓ (ABSZOLÚT ÉRTÉK, SZÖG, MERŐLEGESSÉG, TÁVOLSÁG). *Legyen* $\mathbf{u}$ *és* $\mathbf{v}$ *az* $\mathbb{R}^n$ *tér két tetszőleges vektora.*

a) *Az* $\mathbf{u}$ *vektor hosszán önmagával vett skaláris szorzatának gyökét értjük, azaz*

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}. \tag{1.3}$$

b) *Az* $\mathbf{u}$ *és* $\mathbf{v}$ *vektorok* (hajlás)szögének *koszinusza az alábbi törttel definiálható:*

$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\angle := \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \tag{1.4}$$

c) *Azt mondjuk, hogy az* $\mathbf{u}$ *és* $\mathbf{v}$ *vektorok* merőlegesek *egymásra, ha*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{1.5}$$

d) *A két vektor végpontjának távolságán, amit egyszerűen a két* vektor távolságának *nevezünk, a*

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\mathbf{u} - \mathbf{v}| \tag{1.6}$$

értéket értjük.

► A fenti definíciókat érdemes megtekinteni koordinátás alakjukba átírva. Eszerint például

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2},$$
$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\angle = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}}$$

► A fenti definíciók közül a vektorok hajlásszögének definíciója még hiányos. Egy szög koszinusza csak a $[-1, 1]$ intervallumba eső szám lehet, ezért e definíció csak akkor értelmes, ha az (1.4) képlet számlálójára és nevezőjére igaz, hogy $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$, azaz ha n-dimenziós vektorokra is fönnáll a CBS-egyenlőtlenség. Ezt hamarosan igazolni fogjuk!

1.52. PÉLDA (VEKTOROK SZÖGE ÉS TÁVOLSÁGA). *Az* $\mathbf{u} = (2, 3, 4, 14)$ *vektornak mennyi az abszolút értéke, mennyi a* $\mathbf{v} = (4, 6, -10, 10)$ *vektortól való távolsága, és mennyi a* $\mathbf{w} = (0, 3, 6, -2)$ *vektorral bezárt szögének koszinusza?*

MEGOLDÁS. A válaszhoz az (1.3), az (1.6) és az (1.4) képleteket használjuk:

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{u}| &= \sqrt{2^2+3^2+4^2+14^2} = \sqrt{225} = 15,\\
d(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= \sqrt{(2-4)^2+(3-6)^2+(4-(-10))^2+(14-10)^2}\\
&= \sqrt{2^2+3^2+14^2+4^2} = 15\\
\cos(\mathbf{u},\mathbf{w})_\angle &= \frac{2\cdot 0+3\cdot 3+4\cdot 6+14\cdot(-2)}{\sqrt{2^2+3^2+4^2+14^2}\sqrt{0^2+3^2+6^2+(-2)^2}} = \frac{1}{21}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

1.53. TÉTEL (CAUCHY–BUNYAKOVSZKIJ–SCHWARZ-EGYENLŐTLENSÉG). *Tetszőleges* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *vektorokra*

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \le |\mathbf{u}||\mathbf{v}|. \tag{1.7}$$

Egyenlőség pontosan akkor áll, ha $\mathbf{u}$ *és* $\mathbf{v}$ *lineárisan összefüggők, azaz egyik vektor a másik skalárszorosa.*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel először, hogy $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Ekkor a tétel állításának mindkét része nyilván igaz, hisz egyenlőség áll fenn, és a két vektor lineárisan összefüggő. Ha $\mathbf{v} \ne \mathbf{0}$, akkor legyen $\mathbf{e} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ a $\mathbf{v}$ irányú egységvektor. Az $\mathbf{u}$ vektor $\mathbf{e}$ egyenesére merőleges összetevőjének hossza, illetve annak négyzete nyilván nem negatív, azaz

$$
\begin{aligned}
0 &\le |\mathbf{u}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e}|^2\\
&= |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}|^2 - 2\,|\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}|^2\\
&= |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}|^2\\
&= |\mathbf{u}|^2 - \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|^2}{|\mathbf{v}|^2},
\end{aligned}
$$

Innen átrendezéssel azonnal megkapjuk a bizonyítandó állítást. Másrészt az is világos, hogy $0 = |\mathbf{u}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e}|$ csak akkor állhat fönn, ha $\mathbf{u} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e}$, azaz ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{e}$ párhuzamosak, azaz ha $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ skalárszorosa, vagyis ha a két vektor lineárisan összefüggő. □

1.54. TÉTEL (HÁROMSZÖG-EGYENLŐTLENSÉG $\mathbb{R}^n$-BEN). *Tetszőleges* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *vektorokra*

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \le |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|.$$

A bizonyítás megegyezik a 3-dimenziós változatra, azaz az 1.22. tételre adott bizonyítással.

A vektor abszolút értékét a skaláris szorzat segítségével definiáltuk, de fordítva, a skaláris szorzat is kifejezhető a vektor abszolút értékével.

1.55. TÉTEL (SKALÁRIS SZORZAT ÉS ABSZOLÚT ÉRTÉK $\mathbb{R}^n$-BEN). *Tetsző-*

leges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *vektorokra*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4}\left(|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2\right) \tag{1.8}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2\right) \tag{1.9}$$

BIZONYÍTÁS. A bizonyításban az abszolút érték (1.3)-beli definícióját használjuk:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left(|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2\right) &= \frac{1}{4}\left((\mathbf{u}+\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u}+\mathbf{v}) - (\mathbf{u}-\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u}-\mathbf{v})\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\right) \\
&= \frac{1}{4}(4\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.
\end{aligned}$$

A másik formula hasonlóan bizonyítható. □

Végül egy fontos összefüggés az ortogonális vektorrendszerekről:

1.56. ÁLLÍTÁS (ORTOGONÁLIS VEKTORRENDSZER LINEÁRIS FÜGGETLENSÉGE). *Tegyük fel, hogy a zérusvektortól különböző* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ *vektorok páronként ortogonálisak, azaz bármely* $i \neq j$ *esetén* $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$. *Ekkor e vektorok lineárisan függetlenek.*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy valamely $c_1, c_2, \ldots, c_k$ konstansokra

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Szorozzuk be az egyenlőség mindkét oldalát skalárisan a $\mathbf{v}_i$ vektorral. Mivel $i \neq j$ esetén $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$, ezért azt kapjuk, hogy

$$c_i\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = 0,$$

amiből $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \neq 0$ miatt következik, hogy $c_i = 0$. Mivel ez minden $i = 1, 2, \ldots, k$ indexre igaz, ezért a vektorok valóban lineárisan függetlenek. □

► Ha e vektorok az $\mathbb{R}^n$ tér vektorai, akkor felvetődik a kérdés, hogy mi k és n viszonya. Később látni fogjuk, hogy $k \leq n$.

► Később azt is meg fogjuk mutatni, hogy bármely független vektorrendszerből kiindulva megkonstruálható egy vele azonos elemszámú ortogonális vektorrendszer. A műszaki alkalmazásokban is gyakori, hogy egy meglévő alapvektorrendszerből egy ortogonális, majd abból egy ortonormált vektorrendszert konstruálunk.

*Korrelációs együttható** Az n-dimenziós térben szerzett friss szemléletünk segítségünkre legy egy fontos fogalom megértésében.

Adva van két adatsor: $x_1, x_2, \dots x_n$ és $y_1, y_2, \dots y_n$. Átlagukat jelölje $\bar{x}$, illetve $\bar{y}$, azaz

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}.$$

Az r-rel jelölt ún. *korrelációs együttható* azt méri, hogy a két adatsor közti lineáris függvénykapcsolat milyen erős. Az erre használt képlet a következő:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}.$$

Vajon hogyan méri r a lineáris függvénykapcsolat erősségét?

Tegyük fel, hogy a két adatsor közt fönnáll az $y_i = cx_i + d$ lineáris függvénykapcsolat minden $i = 1, 2, \dots n$ indexre valamely c, d konstansokkal. Ha mindkét adatsorból levonjuk az átlagukat (más szóval a két adatsort *normáljuk*), akkor az így kapott

$$a_i = x_i - \bar{x}, \quad b_i = y_i - \bar{y} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

adatsorokra igaz a $b_i = ca_i$ összefüggés. Ugyanis

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} cx_i + d\right) = c\bar{x} + d,$$

amiből $b_i = y_i - \bar{y} = cx_i + d - c\bar{x} - d = c(x_i - \bar{x}) = ca_i$.

Tehát az $y_i = cx_i + d$ lineáris függvénykapcsolat pontosan akkor áll fönn, ha a normált adatsorokra $b_i = ca_i$. Az adatsorokat n-dimenziós vektorokba foglalva ez azzal ekvivalens, hogy $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$, azaz ha e vektorok kollineárisak. A korrelációs együttható nem más, mint e két utóbbi vektor szögének koszinusza, ugyanis

$$\begin{aligned}\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle &= \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} = r.\end{aligned}$$

Valóban, a két vektor szögének koszinusza pontosan akkor 1, ha a vektorok szöge 0, és akkor -1, ha a szög π. A korreláció tehát -1 és 1 közt változik, és abszolút értéke annál kisebb, minél nagyobb az **a** és **b** vektorok hajlásszöge, azaz minél kevésbé kollineárisak, azaz minél kevésbé erős a két számsorozat közti lineáris függvénykapcsolat.

Ha $r = 0$, akkor **a** és **b** merőlegesek, ekkor lineáris függvénykapcsolat nincs az eredeti két mennyiség közt (más kapcsolat még lehet, tehát nem feltétlenül független a két adatsor egymástól valószínűségszámítási értelemben). A fogalom mélyebb megértése a valószínűségszámítás ismeretét is megkívánja, ezzel mi itt nem foglalkozunk.

*Bitvektorok, kódvektorok** A modern számítógépek memóriájában vagy háttértárolóin az adatok tárolásának legkisebb egysége a bit. Egy bittel két állapot tárolható, melyeket a 0 és 1 számokkal jelölünk, de amelyek több mindent is reprezentálhatnak: hamis/igaz, nem/igen, ki/be,.... A biteket a hardver lehetőségei és a feladat igényei szerint csoportokba, sorozatokba, vektorokba gyűjtik, melyekkel különféle műveletek végezhetők. Ezek attól is függnek, hogy a bitvektorok milyen adatokat kódolnak. E műveletek közül minket azok fognak érdekelni, melyek algebrailag a korábban megismert vektorműveletekre hasonlítanak.

Bit: az angol ***b**inary dig**it*** kifejezésből képzett szó, ami magyarul bináris, azaz kettes számrendszerbeli számot jelent. A szoftver (software) szót is megalkotó John W. Tukey ötlete.

Az egyszerűség kedvéért a bitvektorokat gyakran a biteket jelölő számjegyek egyszerű egymás mellé írásával adjuk meg, pl. 01110101 a $(0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$ vektort jelöli.

A modern számítástechnika számtalan kódot használ, mely bitvektorokkal (is) leírható. Például karakterek kódolására használatos a 7-dimenziós bitvektorokból álló ASCII-kód, a decimális számok kódolására a 4-dimenziós bitvektorokból álló BCD-kód.

Az ASCII-KÓD eredendően az angol nyelvű szövegek kódolására tervezett 8-hosszú bináris kód (azaz 1 bájtos). Az angol nyelv betűi, írásjelei, és néhány számítógépet vezérlő karakter mindegyikének egy olyan vektor felel meg, melynek első koordinátája 0. Tehát a lehetséges 256 darab 8-hosszú vektorból 128 tartozik a kódba. Pl. a „z” betű ASCII-kódja 01111010, decimális alakban 122.

Az emberek által is elolvasható kódok gyakran decimális számokból állnak. Például az emberek azonosítására használt *személyi szám* egy olyan vektornak tekinthető, amelynek koordinátái a 10-elemű $\{0, 1, \ldots, 9\}$ halmazból valók.

A BCD-KÓD decimális számok egyik szokásos kódolása, mely a szám kettes számrendszerbe való átírása helyett a számjegyenként való kódolást választja. Több változata is van, a legegyszerűbbikben minden számjegynek 4-4 bit felel meg, így a 16 lehetséges 4-hosszú kódszó helyett csak tízet használ: a 0, 1,..., 9 jegyek kódja rendre 0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000, 1001. Így az 561 BCD-kódja három kódvektorból áll: 0101 0110 0001. A kettes számrendszerbeli alak 1000110001.

A kódoláshoz mi a továbbiakban mindig egy rögzített, véges kódábécét használunk, amelynek betűi általában a 0-tól $n-1$-ig terjedő egészek lesznek. Az ábécé „betűiből”, azaz elemeiből képzett vektorokat *kódvektor*oknak vagy *kódszavak*nak nevezzük. A bitvektorok is kódvektorok, ahol a kódábécé a kételemű $\{0, 1\}$ halmaz.

A kódvektorok koordinátáinak számát, vagyis a kódvektor dimenzióját a kód *hosszának* nevezzük. Ez természetesen nem analóg fogalom a vektor abszolút értékével.

A személyi szám tehát egy 10-elemű ábécéből képzett 11-hosszú kódszó. Nem minden 11-hosszú decimális vektor lehet személyi szám, mert az utolsó koordináta egy ellenőrző jegy, vagyis a személyi szám, mint kód, matematikailag a 11-hosszú kódvektorok halmazának egy részhalmazaként írható le. Ezért általában a kódábécé betűiből képzett vektorok részhalmazait fogjuk kódnak nevezni.

1.57. DEFINÍCIÓ (KÓD). *A* kód *egy közös ábécéből képzett azonos hosszúságú kódszavak egy halmaza.* Kódolás *során a kódolandó objektumokhoz kódszavakat rendelünk,* dekódolás *az ellenkező irányú folyamat.*

Főként az információelméletben változó hosszú kódszavak is tartozhatnak egy kódhoz. Mi ilyenekkel nem fogunk foglalkozni, de megemlítjük, hogy a karakterek manapság elterjedt UTF-8 kódolása is ilyen, amelyben egy karakterkódja 8-, 16-, 24- vagy 32-bites lehet.

*Vektorműveletek $\mathbb{Z}_m^n$-ben** A $\mathbb{Z}_m$-re vonatkozó ismereteket a függelékben részletezzük. Az 1.43. definíció szerint $\mathbb{Z}_m^n$ a $\mathbb{Z}_m$-beli n-hosszú vektorokból áll. E vektorok összeadása, skalárral való szorzása és skaláris szorzása a $\mathbb{Z}_m$-beli műveletekkel az $\mathbb{R}^n$-beli vektorműveletekhez hasonlóan végezhető el. Ennek következtében a lineáris kombináció, lineáris függetlenség itt is ugyanúgy definiálható és használható.

1.58. PÉLDA (LINEÁRIS KOMBINÁCIÓ $\mathbb{Z}_m^n$-BEN). *Számítsuk ki a $\mathbb{Z}_2^5$-beli*

$$\mathbf{a} = (1,0,0,1,1,0),\ \mathbf{b} = (0,1,0,1,0,1) \text{ és } \mathbf{c} = (0,0,1,0,1,1)$$

vektorok összes lineáris kombinációját $\mathbb{Z}_2$-beli együtthatókkal, valamint a $\mathbb{Z}_3^3$-beli

$$\mathbf{u} = (1,1,0) \text{ és } \mathbf{v} = (0,1,1)$$

vektorok összes lineáris kombinációját $\mathbb{Z}_3$-beli együtthatókkal.

MEGOLDÁS. A lehetséges $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$ alakú lineáris kombinációk száma 8, hisz $x, y, z \in \mathbb{Z}_2$, vagyis mindegyik együtthatónak 0 vagy 1 az értéke, és ez $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ eshetőség. Az $x = y = z = 0$ eset a zérusvektort adja. Ha x, y és z közül csak egyikük értéke 1, a többi 0, akkor a három adott vektort kapjuk vissza. Azok az esetek maradnak, amikor legalább két vektort kell összeadni. Például $1\mathbf{a} + 1\mathbf{b} + 0\mathbf{c} = (1,0,0,1,1,0) + (0,1,0,1,0,1) = (1,1,0,0,1,1)$. Az összes lineáris kombináció az 1.1. (a) táblázatban látható.

Az $x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$ alakú lineáris kombinációk száma 9, mivel $x, y \in \mathbb{Z}_3$, azaz lehetséges értékük 0, 1 vagy 2, ami $3 \cdot 3 = 9$ lehetőséget ad. Példaként egy lineáris kombináció, a többi az 1.1. (b) táblázatban látható: $2\mathbf{u} + 1\mathbf{v} = 2(1,1,0) + (0,1,1) = (2,2,0) + (0,1,1) = (2,0,1)$. □

$x\ y\ z$	$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$
0 0 0	$(0,0,0,0,0,0)$
1 0 0	$(1,0,0,1,1,0)$
0 1 0	$(0,1,0,1,0,1)$
0 0 1	$(0,0,1,0,1,1)$
1 1 0	$(1,1,0,0,1,1)$
1 0 1	$(1,0,1,1,0,1)$
0 1 1	$(0,1,1,1,1,0)$
1 1 1	$(1,1,1,0,0,0)$

(a)

$x\ y$	$x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$
0 0	$(0,0,0)$
1 0	$(1,1,0)$
2 0	$(2,2,0)$
0 1	$(0,1,1)$
1 1	$(1,2,1)$
2 1	$(2,0,1)$
0 2	$(0,2,2)$
1 2	$(1,0,2)$
2 2	$(2,1,2)$

(b)

1.1. táblázat: Vektorok lineáris kombinációi *(a)* $\mathbb{Z}_2$ és *(b)* $\mathbb{Z}_3$ fölött.

E paragrafus további részében a vektorműveletekre két alkalmazást mutatunk.

1.59. PÉLDA (ONE TIME PAD – A TÖKÉLETES TITKOSÍTÁS). *Az üzenet küldése előtt a küldő és a fogadó megegyezik egy titkos kulcsban, mely egy olyan hosszú véletlen bitvektor, mint amilyen az üzenet legföljebb lehet. Legyen a kulcs $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_2^m$. Legyen a titkosítandó üzenet $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}_2^m$. A titkosítás során a küldő kiszámolja az $\mathbf{u} + \mathbf{k}$ vektort, és azt küldi a fogadónak, aki a titkosított üzenethez maga is hozzáadja a kulcsot, és mivel bármely $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^m$ vektorra $\mathbf{x} + \mathbf{x} = \mathbf{0}$, ezért $(\mathbf{u} + \mathbf{k}) + \mathbf{k} = \mathbf{u} + (\mathbf{k} + \mathbf{k}) = \mathbf{u}$, vagyis a fogadó így valóban megfejti az üzenetet.*

► Példaként egy üzenet, egy kulcs és a kettő összege – a titkosított üzenet – a tömör bitvektor-jelöléssel

az üzenet:	$\mathbf{u} = 0101010100001111111111111$
a kulcs:	$\mathbf{k} = 0010110001011010010110010$
a titkosított üzenet:	$\mathbf{u} + \mathbf{k} = 0111100101010101101001011$

► A bitvektorok ilyen módon való összeadása megegyezik a kizáró vagy nevű logikai művelettel, melyet a XOR szóval (exlusive or), vagy a $\oplus$ műveleti jellel is szoktak jelölni (ld. **??**. példa).
► E titkosítás hátránya, hogy a $\mathbf{k}$ kulcs csak egyszer használható fel, mert két különböző $\mathbf{u}_1 + \mathbf{k}$ és $\mathbf{u}_2 + \mathbf{k}$ üzenetet elcsípve és összeadva az $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{k}) + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{k}) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ vektorban már nem szerepel $\mathbf{k}$, és ez statisztikai módszerekkel már megfejthető.
► Bizonyítható, hogy e kód megfejthetetlen, ha $\mathbf{k}$ valóban véletlen bitsorozat, és csak egyetlen üzenet titkosítására használjuk.

A kódelmélet egyik célja, hogy redundáns információ hozzáadásával elérje az elküldött üzenet megérkezését zajos, veszteséges csatornán keresztül is. Ennek két gyakran alkalmazott típusa a hibajelző és a hibajavító kód: az előbbi az átvitel során bekövetkezett bizonyos hibákat jelez a fogadó számára, míg az utóbbi bizonyos hibák kijavítását is lehetővé teszi. Az 1.58. példában előállított lineáris kombinációk hibajelző kódok, egyikük hibajavító is. Az 1.24. feladat arra kérdez, hogy milyen hibát jeleznek, illetve javítanak.

Az elektronikus számítógépek adatkezelésének egyik első ötlete az adattárolás vagy továbbítás biztonságosabbá tételére a paritásbit. Ha egy n-hosszú $\mathbf{b}$ bitvektorhoz még egy bitet csatolunk, melynek értéke 1, ha $\mathbf{b}$-ben páratlan sok bit egyenlő 1-gyel, egyébként 0, akkor olyan $(n+1)$-hosszú vektort kapunk, melyben páros sok 1-esnek kell lenni. Ha egy bit elromlik, páratlan sok 1-es lesz, tehát ez az $(n+1)$-edik bit hibajelző. Ezt nevezzük *paritásbitnek*.

1.60. PÉLDA (PARITÁSBIT). *Írjuk fel a paritásbitet skaláris szorzatként!*

MEGOLDÁS. A paritásbit $\mathbb{Z}_2$ fölött $\mathbf{1} \cdot \mathbf{b}$ alakba írható, ahol $\mathbf{1}$ a $\mathbf{b}$-vel azonos hosszúságú és csupa 1-esből álló vektor. □

A paritásbit általánosítása az ún. *ellenőrző összeg*, melyre számtalan példát találunk a mindennapi életben.

A magyar személyi szám a személyre jellemző 10 jegyből, és az azt követő e ellenőrző összegből áll. Az e kiszámítási képlete

$$\mathbb{Z}_{11}\text{-ben számolva:}\quad e = (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10) \cdot \mathbf{u},$$

ahol $\mathbf{u}$ a személyi szám első 10 jegye. A személyi szám 8-10-edik jegyét úgy választják ki, hogy $e \neq 10$, így az ellenőrző összeg mindig egyjegyű.

A termékek EAN-kódja (European Article Number) egy 13-jegyű, a termék azonosítására szolgáló kód, melyhez egy vonalkód is tartozik. A 13-dik jegy az ellenőrző összeg. Ha az EAN kódvektort $\mathbf{v}$ jelöli, akkor fönn kell állni

$$\mathbb{Z}_{10}\text{-ben számolva az } (1,3,1,3,1,3,1,3,1,3,1,3,1) \cdot \mathbf{v} = 0$$

összefüggésnek (1.43. ábra).

ISBN 978-963-545-398-6

9 789635 453986 >

1.43. ábra: Egy könyv ISBN-13 kódja, ami egyúttal az EAN kódja is. Az EAN-kódhoz tartozik egy vonalkód is. 2007 óta a könyvek ISBN-száma (ISBN-13) megegyezik EAN-kódjával (korábban 10-jegyű volt).

Feladatok

1.24.▲ Az 1.1. (a) táblázatban egy 8 bináris kódszóból, a (b) táblázatban egy 9 ternér kódszóból álló kód kódszavai vannak felsorolva. Határozzuk meg, hogy e kódok hány hiba jelzésére és hány hiba javítására képesek! (Az, hogy egy kód képes k hibát jelezni, azt jelenti, hogy ha legföljebb k jelet megváltoztatunk bármelyik kódszóban, akkor egy kódba nem tartozó vektort kapunk. Az, hogy a kód képes d hibát javítani, azt jelenti, hogy bármely kódszóban legföljebb d jelet megváltoztatva olyan vektort kapunk, amelyből más kódszó nem kapható meg legföljebb d jel megváltoztatásával.)

1.25. Mely bitvektorokra igaz, hogy minden bitjük a vektor maradék részének paritásbitje.

1.26.▲ Ellenőrző összeg Csak az ellenőrző összeget nézve érvényes személyi szám-e a 26012310018, és érvényes EAN-kód-e a 9998887776665?

1.27.▲ 2007 előtt a személyi számhoz hasonló módon számolták ki a könyvek ún. ISBN-10 kódjának ellenőrző jegyét, ami ha 10 volt, X-et írtak (római 10-es). A képlet:

$$Z_{11}\text{-ben számolva: } (10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1) \cdot \mathbf{u} = 0$$

ahol $\mathbf{u}$ a könyv ISBN-kódja, aminek utolsó jegye az ellenőrző összeg. Egy könyv kódjának első 9 jegye 963076198. Mi e könyv teljes ISBN-száma?

Megoldások

1.1. „Ha az irányított szakasz a hal, akkor a vektor a halraj.”

1.2. *a)* Igaz. *b)* Hamis, például ha $O = A$, akkor $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$, míg ha $O = B$, akkor $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$. *c)* Igaz, az eredmény O választásától függetlenül $\overrightarrow{BA}$. *d)* Igaz. *e)* Hamis, lehetnek ellenkező irányúak is. *f)* Igaz.

1.9. $\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_3P_4} + \ldots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n} = \overrightarrow{P_1P_n}$, $\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_3P_4} + \ldots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n} + \overrightarrow{P_nP_1} = \mathbf{0}$.

1.12. *a)* Hamis, lehet, hogy a három közül két vektor egy egyenesbe esik, és a harmadik független tőlük: ez a harmadik nem állítható elő a másik kettő lineáris kombinációjaként. *b)* Igaz, például $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ilyenek. De bármely három egy síkba eső nemzérus-vektor ilyen, ha közülük bármely kettő lineárisan független. *c)* Igaz, például ha $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ és $\mathbf{a}$ független $\mathbf{b}$-től. *d)* Hamis, például ha $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ és $\mathbf{a}$ független $\mathbf{b}$-től, akkor $\mathbf{a}$ nem fejezhető ki $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ lineáris kombinációjaként.

1.13. Ha $|\overline{AP}| : |\overline{PB}| = m : n$, akkor $|\overline{AB}| : |\overline{PB}| = (m+n) : n$, amiből $\overrightarrow{BP} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{BA}$. De $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP}$ és $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$, így $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \frac{n}{m+n}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})$, amiből azonnal következik a bizonyítandó formula. A felezőpontot az $m = n = 1$ esetben kapjuk, és ekkor valóban $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

1.15. Legyenek $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ független vektorok, $\mathbf{b}$ pedig tetszőleges. Ekkor az $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ szorzat párhuzamos a $\mathbf{c}$ vektorral, míg az $\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ szorzat az $\mathbf{a}$ vektorral, tehát $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \neq \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$.

1.16. Jelölje P szomszédait Q, R és S.

a) Ekkor két lapátló-vektor például a $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}$ és a $\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS}$ vektorok. Ezek szorzata:

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}\right) \cdot \left(\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS}\right) &= \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PS} &= \\ \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PR} &= 1.\end{aligned}$$

Kihasználtuk, hogy merőleges vektorok skaláris szorzata 0.

b) Hasonlóan kapható meg egy lapátló-vektor és a testátló-vektor $(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS})$ szorzata:

$$\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}\right) \cdot \left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS}\right) = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PR} = 2.$$

c) A Q, R és S csúcsok olyan sorrendben legyenek megválasztva, hogy $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ és $\overrightarrow{PS}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkosson. Ki fogjuk használni, hogy ekkor $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PS}$. Egy élvektor és egy szomszédos lapátló-vektor vektori szorzata:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} \times \left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}\right) &= \\ \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} &= \\ \mathbf{0} + \overrightarrow{PS} &= \overrightarrow{PS},\end{aligned}$$

vagyis a szorzat a két vektor lapjára merőleges élvektor.

d) Legyen a lapvektor a $\overrightarrow{PR}$, a nem szomszédos lapátló-vektor $\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS}$. Ezek szorzata:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} \times \left(\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS}\right) &= \\ \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS} &= \overrightarrow{PS} - \overrightarrow{PR},\end{aligned}$$

ami a lapátló-vektor síkjának másik lapátló-vektora.

1.18. Három különböző dolog (így három vektor is) hatféleképp rakható sorba. Ha az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok jobbrendszert alkotnak, akkor ugyancsak jobbrendszert alkotnak a $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{c}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorhármasok is. A további három esetben, azaz a $\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$, valamint a $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$ és az $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$ hármasok esetén balrendszert kapunk. A „bizonyítás” egyelőre a kezünk három ujjáról való leolvasással történik. Később matematikai bizonyítást is adunk, lásd ???.

1.19. Egyik lehetőség a megoldásra: $||\mathbf{b}|\mathbf{a}| = ||\mathbf{a}|\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$, ezért a parallelogramma-módszert egy rombuszra kell alkalmazni. Egy másik lehetőség: az $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ és $\mathbf{b}/|\mathbf{b}|$ két egységvektor, így összegük szögfelező, mivel a parallelogramma-módszer rombuszt ad. E vektor $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$-szerese ugyanúgy szögfelező, és épp ez a feladatbeli vektor.

1.21. Milyen irányokat cserél föl a tükör, és milyeneket nem? Nem cseréli föl a síkkal párhuzamos irányokat: minden, a tükör síkjával párhuzamos vektor tükörképe önmaga. Tehát, ha a tükör előtt állunk, és a tükör is függőleges, akkor a „fölfelé” irány a tük9örképen sem változik. Viszont a tükör fölcseréli a tükörre merőleges irányokat. Mielőtt megnézzük, hogy hogy cserélődik fel a jobb és a bal, definiálnunk kell mi az, hogy jobb és bal? ....

1.25. Minden olyan vektor, amelyben páros sok 1-es van, eleget tesz a feladatbeli feltételnek, a többi nem.

1.26. Ez a személyi szám érvényes, mert
$(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10) \cdot (2,6,0,1,2,3,1,0,0,1) =$
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 9 \cdot 0 + 10 \cdot 1 \bmod 11 = 63 \bmod 11 = 8.$

Ez az EAN-kód nem érvényes, mert
$(1,3,1,3,1,3,1,3,1,3,1,3,1) \cdot (9,9,9,8,8,8,7,7,7,6,6,6,5) =$

$(9+3\cdot 9+9+3\cdot 8+8+3\cdot 8+7+3\cdot 7+7+3\cdot 6+6+3\cdot 6+5) \bmod 10 = 183 \bmod 10 = 3 \neq 0$.

1.27. Mivel $(10,9,8,7,6,5,4,3,2,1)\cdot(9,6,3,0,7,6,1,9,8,e) = 10\cdot 9+9\cdot 6+8\cdot 3+6\cdot 7+5\cdot 6+4\cdot 1+3\cdot 9+2\cdot 8+e = 287+e \bmod 11 = 1+e$. Mivel $1+e=0$, ezért $e=10$, azaz a teljes kód 963076198X (a könyvre olvashatóbban írva 963-07-6198-X).

2

Lineáris egyenletrendszerek és megoldásuk

A lineáris egyenletrendszerek geometriai megközelítése után megismerjük a megoldás technikáit, végül a megoldások halmazának szerkezetét!

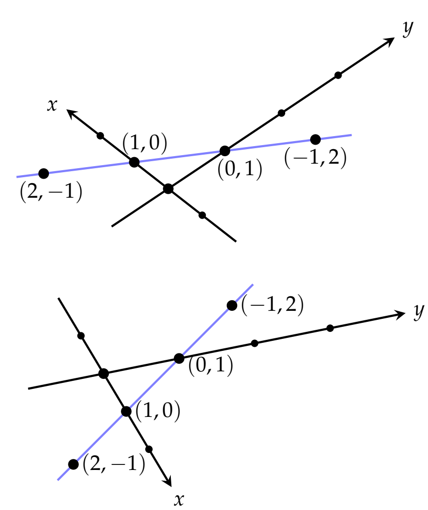
Egyenes és sík egyenletei

A sík és tér pontjainak és vektorainak koordinátáit használva lehetővé válik geometriai alakzatok algebrai vizsgálata, vagy algebrai problémák jobb megértése geometriai szemléltetéssel.

2.1. PÉLDA (AZ $x + y = 1$ EGYENLET). *Egy tetszőleges síkbeli koordinátarendszerben ábrázoljunk néhány pontot, melynek koordinátái kielégítik az $x + y = 1$ egyenletet. Fogalmazzunk meg sejtést az egyenlet összes megoldásának megfelelő pontok halmazáról!*

Alakzatok és egyenletek

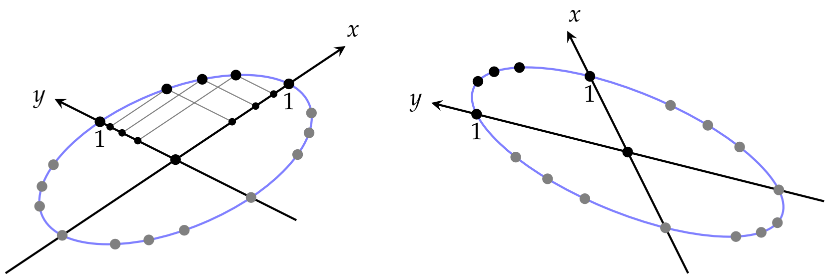
MEGOLDÁS. Az alábbi ábrán két különböző koordinátarendszert ábrázolunk, és azokban a fenti egyenletet kielégítő pontok közül néhányat. Ennek alapján azt sejthetjük, hogy az $x + y = 1$ egyenletet kielégítő pontok egy egyenesen vannak. Ezt az egyenest is berajzoltuk. A sejtést hamarosan bizonyítjuk. □



2.1. ábra: Az $x + y = 1$ egyenletet kielégítő néhány pont két különböző koordinátarendszerben.

2.2. PÉLDA (AZ $x^2 + y^2 = 1$ EGYENLET). *Egy tetszőleges síkbeli koordinátarendszerben ábrázoljunk néhány pontot, melynek koordinátái kielégítik az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletet. Fogalmazzunk meg sejtést az egyenlet összes megoldásának megfelelő pontok halmazáról!*

MEGOLDÁS. Az alábbi ábrán néhány koordinátarendszert ábrázoltunk, az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletet kielégítő néhány ponttal. A ??? fejezetben visszatérünk e feladatra, és meg fogjuk mutatni, hogy az egyenletet kielégítő pontok egy ellipszisen vannak. □



2.2. ábra: Az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletet kielégítő (x, y) pontok halmaza két koordinátarendszerben.

2.3. definíció (Alakzat (implicit) egyenletrendszere). *Egy geometriai alakzat egy adott koordinátarendszerre vonatkozó* (implicit) egyenletrendszerén *olyan egyenletrendszert értünk, melynek egyszerre minden egyenletét kielégítik a térnek az alakzathoz tartozó pontjai, de más pontok nem. Ha az egyenletrendszer egy egyenletből áll, az alakzat* egyenletéről *beszélünk. Az egyenletet* vektoregyenletnek *nevezzük, ha nem a pontok koordinátáira, hanem a pontokba mutató vektorokra írjuk fel. Egy alakzat m egyenletből álló egyenletrendszerének, illetve m vektoregyenletből álló egyenletrendszerének általános alakja*

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \qquad \vdots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \quad \textit{illetve} \quad \begin{cases} F_1(\mathbf{r}) = 0 \\ F_2(\mathbf{r}) = 0 \\ \quad \vdots \\ F_m(\mathbf{r}) = 0 \end{cases}$$

ahol $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *a tér egy pontja, és* $\mathbf{r}$ *az oda mutató vektor.*

A latin eredetű *implicit* szó jelentése *nem kifejtett*, *rejtett*, ami az összeköt, összefügg, összekever, körülcsavar jelentésű *implico* (implicō) szó származéka. E szó a matematikában az implicit alak, implicit függvény, stb. kifejezésekben arra utal, hogy valamely fontosnak tekintett mennyiség, változó, stb. nincs kifejezve a képletből. Ugyanennek a szónak a származéka a magába foglal, maga után von jelentésű *implikál* szó is, mely a matematikai logika „ha. . . , akkor. . . ” szerkezetű műveletével, az *implikációval* is kapcsolatban van.

Középiskolai tanulmányainkban több példát láttunk alakzat egyenletére, például tudjuk, hogy a síkban a koordinátatengelyek szögét felező egyenes egyenlete $y = x$, azaz $x - y = 0$. Ortonormált bázist választva az origó középű egységsugarú kör egyenlete $x^2 + y^2 = 1$. Az előző két egyenlet mindegyikéből *kifejezhető* a két koordináta egy paraméter bevezetésével. Az $y = x$ egyenlet ekvivalens az

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= t \end{aligned}$$

egyenletrendszerrel, míg az $x^2 + y^2 = 1$ egyenlet ekvivalens az

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{aligned}$$

egyenlettel. Mindkettő átírható vektoralakba is. Használjuk a oszlopvektoros jelölést:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}.$$

E két példa vezet a következő általános fogalomhoz.

A latin eredetű *explicit* szó jelentése *kifejtett, világosan kimondott*, ami a kibont, szétterít, kiszabadít, átvitt értelemben tisztáz, kifejt, megfejt jelentésű *explico* (explicō) szó származéka. E szó a matematikában az explicit alak, explicit függvény, stb. kifejezésekben arra utal, hogy valamely fontosnak tekintett mennyiség, változó, stb. ki van fejezve a többi segítségével.

2.4. DEFINÍCIÓ (ALAKZAT (EXPLICIT) EGYENLETRENDSZERE). *Egy geometriai alakzat egy adott koordinátarendszerre vonatkozó* (explicit) egyenletrendszerén *olyan egyenletrendszert értünk, melyben az egyenletek bal oldalán a pontok koordinátáit megadó változók, jobb oldalán adott paraméterek függvényei szerepelnek. Általános alakja*

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(t_1, t_2, \dots, t_k) \\ x_2 &= f_2(t_1, t_2, \dots, t_k) \\ &\vdots \\ x_n &= f_n(t_1, t_2, \dots, t_k) \end{aligned}$$

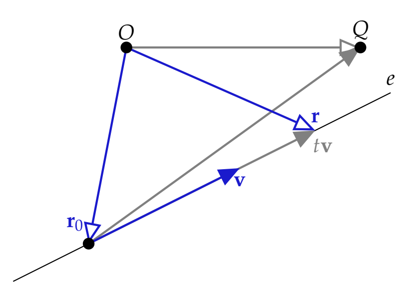
ahol $t_1 \in I_1$, $t_2 \in I_2, \dots, t_n \in I_n$, és $I_1, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}$. Az ilyen egyenletrendszer egyetlen vektoregyenletté fogható össze:

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(t_1, t_2, \dots, t_k),$$

ahol $\mathbf{f}$ *egy* $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ *függvény. Az explicit egyenletrendszereket szokás* paraméteres egyenletrendszernek *is nevezni.*

A következő paragrafusokban egyenes és sík különböző egyenleteit, egyenletrendszereit fogjuk áttekinteni példákat adva a fenti két általános definícióra.

Síkbeli egyenes egyenletei Tekintsük a sík egy tetszőleges e egyenesét, és jelöljük ki a síkban az O origót. Legyen a nemzérus $\mathbf{v}$ egy tetszőleges, az egyenessel párhuzamos vektor. Az ilyen vektorokat az egyenes *irányvektorának* nevezzük. Mutasson $\mathbf{r}_0$ az egyenes egy tetszőleges, kijelölt pontjába. Világos, hogy az e egyenes bármely pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektor előáll $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban, ahol t valós szám. Másrészt ha Q a sík egy tetszőleges, nem az e egyenesre eső pontja, akkor az $\overrightarrow{OQ} - \mathbf{r}_0$ vektor nem párhuzamos $\mathbf{v}$-vel, tehát nem is konstansszorosa, azaz $\overrightarrow{OQ} - \mathbf{r}_0 \neq t\mathbf{v}$ semmilyen t-re sem, így $\overrightarrow{OQ}$ nem áll elő $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban. Tehát az e tetszőleges pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektor felírható $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban, és ez csak e pontjaira igaz.



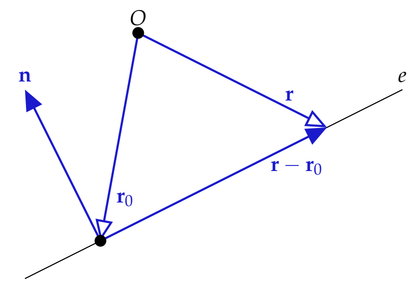
2.3. ábra: Egyenes explicit vektoregyenlete: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$.

2.5. ÁLLÍTÁS (SÍKBELI EGYENES EXPLICIT VEKTOREGYENLETE). *A sík minden egyenesének van*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \tag{2.1}$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol $\mathbf{v}$ *az egyenes egy irányvektora, és* $\mathbf{r}_0$ *az egyenes egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor.*

A síkbeli egyenesre merőleges vektorokat az egyenes *normálvektorainak* nevezzük. Legyen $\mathbf{n}$ egy tetszőleges, a $\mathbf{v}$-re merőleges vektor, azaz legyen $\mathbf{n}$ az e egy normálvektora. Azt, hogy $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ az e tetszőleges pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektorra párhuzamos $\mathbf{v}$-vel, úgy is kifejezhetjük, hogy $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ merőleges $\mathbf{n}$-re. A merőlegesség pedig kifejezhető a skaláris szorzattal. Így az egyenes egy implicit vektoregyenletéhez jutunk: $\mathbf{r}$ pontosan akkor mutat az e egy pontjába, ha $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0$. Ez az egyenlet átrendezés után $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0$ alakra, majd a $C=\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0$ jelölés bevezetésével $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=C$ alakra hozható.



2.4. ábra: Síkbeli egyenes implicit vektoregyenlete: $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0$.

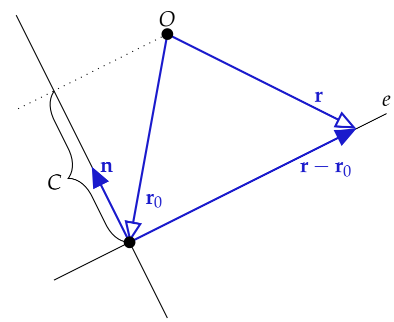
2.6. ÁLLÍTÁS (SÍKBELI EGYENES IMPLICIT VEKTOREGYENLETE). *A sík minden egyenesének van*

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0, \tag{2.2}$$

és vele ekvivalens

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=C \tag{2.3}$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol $\mathbf{n}$ *az egyenes egy normálvektora,* $\mathbf{r}_0$ *az egyenes egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor és* C *konstans.*



2.5. ábra: Síkbeli egyenes (implicit) vektoregyenlete: $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=C$. Ha $\mathbf{n}$ *egységvektor*, akkor az $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=C$ geometriai jelentése az, hogy az egyenes bármely pontjába mutató vektornak az $\mathbf{n}$ egyenesére eső merőleges vetülete C. Ez az ábra is ezt az esetet szemlélteti.

A (2.2) alakú egyenlet könnyen átírható (2.3) alakúvá a $C=\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0$ jelöléssel. Az átalakítás fordított irányban is egyszerű, hisz ha $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=C$, akkor találunk olyan $\mathbf{r}_0$ vektort, melyre $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0=C$. Ez azért igaz, mert ha tetszőleges $\mathbf{n}$-re nem merőleges $\mathbf{v}$ vektorra $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}=D$, akkor $\mathbf{n}\cdot(\frac{C}{D}\mathbf{v})=C$, így az $\mathbf{r}_0=\frac{C}{D}\mathbf{v}$ megfelel.

Az $\mathbf{r}=(x,y)$, $\mathbf{r}_0=(x_0,y_0)$ és $\mathbf{v}=(a,b)$ jelöléseket használva az explicit vektoregyenlet azonnal egyenletrendszerré alakítható.

2.7. ÁLLÍTÁS (SÍKBELI EGYENES EXPLICIT EGYENLETRENDSZERE). *A sík minden egyenesének van*

$$\begin{aligned} x&=x_0+at\\ y&=y_0+bt \end{aligned} \tag{2.4}$$

alakú egyenletrendszere, ahol (a,b) *az egyenes egy irányvektora, és* (x_0,y_0) *az egyenes egy tetszőleges rögzített pontja.*

A következőkben megmutatjuk, hogy az explicit egyenletrendszerből a t paraméter kiküszöbölhető, és így egy implicit egyenletet kapunk.

2.8. ÁLLÍTÁS (SÍKBELI EGYENES (IMPLICIT) EGYENLETE). *A sík minden* *egyenesének van*

$$Ax + By = C \tag{2.5}$$

alakú egyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol A és B közül nem mindkettő nulla, és $(-B, A)$ az egyenes egy irányvektora.

A bizonyítás előtt érdemes megjegyezni, hogy az egyenes fenti implicit egyenlete az egyenes $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ alakú vektoregyenletéből azonnal megkapható, de ezt egyelőre csak *ortonormált* koordinátarendszerben tudjuk könnyen igazolni. Legyen $(A, B) = (b, -a)$. Ez az egyenes egy normálvektora, hisz merőleges az (a, b) irányvektorra. Továbbá $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_0, y - y_0)$, ezért a vektoregyenlet

$$(A, B) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$$

alakú lesz, ami a skaláris szorzást elvégezve az $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ formulát adja. Ha a koordinátarendszer nem ortonormált, az (A, B) vektor nem szükségképpen normálvektor, és a skaláris szorzás képlete is más, de azért a (2.5) egyenletről mondott állítás igaz. A ??. fejezetben tanultak alapján az egyenes egyenletét a vektoregyenletből majd nem ortonormált koordinátarendszer esetén is le tudjuk vezetni, most viszont egy olyan bizonyítást adunk, mely az explicit egyenletrendszerre épül.

BIZONYÍTÁS. Ha a vagy b valamelyike 0, akkor a két egyenlet egyike felesleges, például ha $a = 0$, akkor az egyenletrendszer alakja

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 + bt \end{aligned}$$

ami ekvivalens az $x = x_0$ egyenlettel, hisz az $y = y_0 + bt$ semmi mást nem mond, mint hogy y egy valós szám. Mivel $(a, b) \neq (0, 0)$, ezért csak az az eset marad, amikor a és b egyike sem 0. Ekkor mindkét egyenletből kifejezhető t, és a két értéket egyenlővé téve kapjuk, hogy

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b},$$

azaz

$$bx - ay = bx_0 - ay_0, \text{ vagy } b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0.$$

Legyen a továbbiakban $A = b$ és $B = -a$. Ekkor a fenti egyenlet $Ax + By = Ax_0 + By_0$ lesz. Az egyenlet jobb oldalán lévő konstanst C-vel jelölve az egyenes egyenlete $Ax + By = C$ alakot ölt. Másrészt könnyen látható, hogy minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, mert ekvivalens egy egyenes paraméteres egyenletrendszerével. Nevezetesen az $Ax + By = C$ egyenlet visszaírható $Ax + By = Ax_0 + By_0$ alakba, hisz az $Ax_0 + By_0 = C$ egyenletben $A \neq 0$ esetén egy tetszőleges y_0-t választva, egyértelműen kifejezhető x_0. (A $B \neq 0$ eset analóg.) Ennek alapján felírható a (2.4) egyenletrendszer. □

2.9. PÉLDA (SÍKBELI EGYENES EGYENLETEI). *Írjuk fel annak az egyenesnek összes egyenletét vagy egyenletrendszerét, mely átmegy a* $(2,3)$ *és az* $(1,1)$ *koordinátájú pontokon.*

MEGOLDÁS. Ha egy egyenes átmegy e két ponton, akkor irányvektora a két pontba mutató vektorok különbsége, azaz $\mathbf{v} = (2,3) - (1,1) = (1,2)$. Legyen $\mathbf{r}_0 = (1,1)$, de az $\mathbf{r}_0 = (2,3)$ választás is megfelelő.

Az irányvektor segítségével kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Explicit (paraméteres) egyenletrendszer alakban:

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 1 + 2t. \end{aligned}$$

Az irányvektorból $(A,B) = (2,-1)$, innen az egyenes egyenlete $2x - y = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1$, azaz

$$2x - y = 1.$$

Ortonormált koordináta-rendszerben a

$$(2,-1) \cdot (x-1, y-1) = 0$$

egyenletet kapjuk vektoregyenletként, mely kiszámolva az előző egyenletet adja. □

Síkbeli pont egyenletei Tekintsük a síkbeli (x_0, y_0) pontot. Ennek explicit egyenletrendszere, illetve vektoregyenlete:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 \end{aligned} \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Ez annyira nyilvánvaló, semmitmondó, hogy a gyakorlatban nem is szoktunk pont egyenleteiről beszélni, e könyvbe is csak didaktikai okokból került, ugyanis a matematikai fogalmak megértésében gyakran nagy segítségünkre van a szélső, extremális esetek megértése, vizsgálata.

Mivel itt az alakzat csak egyetlen pontból áll, nincs szükség paraméterre, így ez az alak egyúttal implicitnek is tekinthető. Ekkor úgy tekintünk ugyanerre az egyenletrendszerre, mint két egyenes egyenletére, melyek normálvektorai $(1,0)$ illetve $(0,1)$, és amelyek metszéspontja a keresett pont:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 \end{aligned} \quad \text{vagy minden együtthatót kiírva} \quad \begin{aligned} x + 0y &= x_0 \\ 0x + y &= y_0 \end{aligned}$$

Ez adja az ötletet, egy pont implicit egyenletrendszerének tekinthetnénk két egyenletet, melyek egymást az adott pontban metsző egy-egy egyenes egyenletei. Tehát mondhatjuk, hogy a pont implicit egyenletrendszerének általános alakja:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y &= C_1 \\ A_2x + B_2y &= C_2 \end{aligned}$$

Az azonban itt nem igaz, hogy minden ilyen alakú egyenletrendszer egy pont egyenletrendszere, mert két egyenes metszheti egymást egyetlen pontban, de lehet, hogy nincs közös pontjuk, és lehet végtelen sok közös pontjuk is. Épp ennek a kérdésnek a részletes vizsgálata lesz a 2. fejezet témája.

A 3-dimenziós tér síkjainak egyenletei Tudjuk, hogy két lineárisan független $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektor bármely lineáris kombinációja a két vektor által meghatározott síkban van, továbbá hogy e sík bármely vektora előáll a megadott két vektor lineáris kombinációjaként (ld. 1.8.. és 1.11. tételek). Ebből azonnal adódik, hogy a sík egy rögzített pontjába mutató $\mathbf{r}_0$ vektor segítségével a sík bármelyik pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektor felírható $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ alakban.

2.10. ÁLLÍTÁS (SÍK EXPLICIT VEKTOREGYENLETE). *Bármely síknak van*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v} \tag{2.6}$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy sík egyenlete, ahol $\mathbf{u}$ *és* $\mathbf{v}$ *a sík két lineárisan független vektora, és* $\mathbf{r}_0$ *a sík egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor.*

Hasonlóan a síkbeli egyeneshez, a térbeli sík egyenletéből is kiküszöbölhető a paraméter a merőlegesség felhasználásával. Az 1.17. feladat állítása szerint, ha egy vektor merőleges két tetszőleges vektor mindegyikére, akkor merőleges azok lineáris kombinációjára is. Mivel az $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ merőleges $\mathbf{u}$-ra és $\mathbf{v}$-re is, ezért merőleges azok minden lineáris kombinációjára is, azaz az $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ vektorra is. Ez az észrevétel az alapja az alábbi tételnek.

2.11. ÁLLÍTÁS (SÍK IMPLICIT VEKTOREGYENLETE). *A háromdimenziós térben minden síknak van*

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0, \tag{2.7}$$

és a vele ekvivalens

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C \tag{2.8}$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy sík egyenlete, ahol $\mathbf{n}$ *a sík egy normálvektora,* $\mathbf{r}_0$ *a sík egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor és* C *konstans.*

Az állítás igazolása analóg a síkbeli egyenesnél leírtakkal.

Az $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ és $\mathbf{u} = (a_1, b_1, c_1)$ $\mathbf{v} = (a_2, b_2, c_2)$ jelöléseket használva az explicit vektoregyenlet azonnal egyenletrendszerré alakítható.

2.12. ÁLLÍTÁS (SÍK EXPLICIT EGYENLETRENDSZERE). *A háromdimenziós tér minden síkjának van*

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a_1 s + a_2 t \\ y &= y_0 + b_1 s + b_2 t \\ z &= z_0 + c_1 s + c_2 t \end{aligned} \tag{2.9}$$

alakú egyenletrendszere, ahol (a_1, b_1, c_1) *és* (a_2, b_2, c_2) *a sík két lineárisan független vektora, és* (x_0, y_0, z_0) *a sík egy tetszőleges rögzített pontja.*

Az explicit egyenletrendszerből kiküszöbölhető a két paraméter, ha például két egyenletből kifejezzük a paramétereket, és behelyettesítjük a harmadik egyenletbe. Így egy implicit egyenletet kapunk. A számításokat nem részletezzük, az eredmény

$$(b_1c_2 - b_2c_1)(x - x_0) + (c_1a_2 - c_2a_1)(y - y_0) + (a_1b_2 - b_1a_2)(z - z_0) = 0.$$

Az $(A, B, C) = (b_1c_2 - b_2c_1, c_1a_2 - c_2a_1, a_1b_2 - a_2b_1)$ jelöléssel a sík egyenlete $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ alakra hozható, vagy ami vele ekvivalens, $Ax + By + Cz = D$ alakra.

2.13. ÁLLÍTÁS (SÍK IMPLICIT EGYENLETE). *A háromdimenziós térben minden síknak van*

$$Ax + By + Cz = D \tag{2.10}$$

alakú egyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy sík egyenlete, ha A, B *és* C *legalább egyike nem nulla, és* $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$*, ahol* (x_0, y_0, z_0) *a sík valamely pontja.*

A sík fenti egyenlete a sík $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ alakú vektoregyenletéből is megkapható, de ezt egyelőre csak *ortonormált* koordinátarendszerben tudjuk könnyen igazolni. Mivel

$$(A, B, C) = (b_1c_2 - b_2c_1, c_1a_2 - c_2a_1, a_1b_2 - a_2b_1), \tag{2.11}$$

ami épp az $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ vektorral egyenlő, ezért (A, B, C) merőleges a sík minden vektorára, vagyis a sík egy normálvektora. Az $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ egyenletet koordinátás alakba átírva kapjuk, hogy

$$(A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

2.14. PÉLDA (SÍK EGYENLETEI). *Írjuk fel annak a síknak az egyenleteit, mely átmegy a* $(0, -1, 2)$, *a* $(-1, 0, 7)$ *és a* $(2, 1, 4)$ *pontokon.*

MEGOLDÁS. A három pontba mutató vektorok különbségei a síkkal párhuzamos vektorok, így azokkal felírható a sík mindegyik egyenlete. Két vektor a lehetséges háromból:

$$\mathbf{u} = (2,1,4) - (0,-1,2) = (2,2,2), \text{ és}$$
$$\mathbf{v} = (-1,0,7) - (0,-1,2) = (-1,1,5).$$

Ezek alapján például az $\mathbf{r}_0 = (0,-1,2)$ választás mellett a sík explicit vektoregyenlete

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix},$$

explicit egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x &= \phantom{-1+{}} 2s - t \\ y &= -1 + 2s + t \\ z &= 2 + 2s + 5t \end{aligned}$$

Mivel a (2.11) képlet szerint $(A,B,C) = (8,-12,4)$, ezért a sík implicit egyenlete $8(x-0) - 12(y-(-1)) + 4(z-2) = 0$, azaz 4-gyel való osztás és átrendezés után

$$2x - 3y + z = 5.$$

Így ortonormált koordinátarendszerben a

$$(2,-3,1)\cdot(x,y,z) = 5, \text{ vagy } (2,-3,1)\cdot(x,y+1,z-2) = 0$$

a sík implicit vektoregyenlet alakja. □

Térbeli egyenes egyenletei Mindaz, amit a síkbeli egyenes explicit vektoregyenletéről mondtunk az 55. oldalon, lényegében változtatás nélkül megismételhető. Jelöljük ki a térben az origót, és tekintsük azt az e egyenest, melynek irányvektora $\mathbf{v}$, és amely átmegy azon a ponton, melybe az $\mathbf{r}_0$ vektor mutat. Világos, hogy az e egyenes bármely pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektor előáll $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban, ahol t valós szám, és az e-re nem illeszkedő pontokra ez nem áll. Így igaz a következő állítás:

2.15. ÁLLÍTÁS (TÉRBELI EGYENES EXPLICIT VEKTOREGYENLETE). *A háromdimenziós tér minden egyenesének van*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \tag{2.12}$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol $\mathbf{v}$ az egyenes egy irányvektora, és $\mathbf{r}_0$ egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor.

Itt nem tudjuk a paramétert egyetlen vektoregyenletben kiküszöbölni, de az explicit egyenletrendszerré való átírás megy, ha felveszünk egy koordinátarendszert, melyben $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ és $\mathbf{v} = (a, b, c)$:

2.16. ÁLLÍTÁS (TÉRBELI EGYENES EXPLICIT EGYENLETRENDSZERE). *A tér minden egyenesének van*

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned} \tag{2.13}$$

alakú egyenletrendszere, ahol (a, b, c) az egyenes egy irányvektora, és (x_0, y_0, z_0) az egyenes egy tetszőleges rögzített pontja.

A fenti explicit (paraméteres) egyenletrendszerből a paraméter kiküszöbölhető. Ha az a, b és c számok valamelyike 0, akkor a neki megfelelő fenti egyenletben már nem szerepel t, akkor nincs is mit tennünk. Ha legalább két egyenletben szerepel t, akkor mindegyikből kifejezve t-t, majd egyenlővé téve őket paraméter nélküli egyenleteket kapunk. Például ha a, b és c egyike sem 0, akkor

$$t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

A t-t elhagyva valójában három egyenletet kaptunk:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, \qquad \frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c}, \qquad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Annak az egyenletnek nincs értelme, amelyikben a nevező 0, de a nevezőkkel való bővítés után kapott

$$b(x - x_0) = a(y - y_0), \quad c(x - x_0) = a(z - z_0), \quad c(y - y_0) = b(z - z_0)$$

egyenletek mindegyike korrekt akkor is, ha 0 valamelyik együttható. E három egyenlet három sík egyenlete, melyek metszésvonala az adott egyenes. Kivétel az az eset, amikor az egyik egyenlet $0 = 0$ alakú, ilyenkor a másik két egyenlet egy-egy sík egyenlete. Egy egyenes azonban megadható két sík metszésvonalaként, így adódik a következő tétel, melynek bizonyítását feladatként tűzzük ki:

A három síkból azonban már kettő is meghatározza az egyenest, így két egyenletből álló egyenletrendszerrel is megadható az egyenes. Bizonyítható az alábbi állítás:

2.17. ÁLLÍTÁS (TÉRBELI EGYENES IMPLICIT EGYENLETRENDSZERE). *A tér minden egyenesének van két egyenletből álló egyenletrendszere. Ha az egyenes egy irányvektora (a, b, c), akkor a két egyenlet az alábbi három közül* *bármelyik kettő, amelyik nem* $0 = 0$ *alakú:*

$$\begin{aligned} b(x - x_0) &= a(y - y_0) \\ c(x - x_0) &= a(z - z_0) \\ c(y - y_0) &= b(z - z_0) \end{aligned} \tag{2.14}$$

► A (2.14) egyenletrendszer a következő alakba is átírható:

$$\begin{array}{rrrl} bx & -ay & & = bx_0 - ay_0 \\ cx & & -az & = cx_0 \qquad\quad - az_0 \\ & cy & -bz & = \qquad\quad cy_0 - bz_0 \end{array} \tag{2.15}$$

Erről könnyen leolvasható, hogy ha pl. $a \neq 0$, akkor a második egyenlet b-szereséből kivonva az első egyenlet c-szeresét, a harmadik egyenlet a-szorosát kapjuk. Hamarosan látni fogjuk, hogy eszerint a harmadik egyenlet elhagyható, anélkül, hogy az egyenletrendszert kielégítő pontok halmaza megváltozna.

2.18. példa (Térbeli egyenes egyenletrendszerei). *Írjuk fel annak az egyenesnek az explicit és implicit egyenletrendszerét, mely átmegy az* $A(1,3,4)$ *és az a)* $B(3,3,1)$ *b)* $B(5,5,-2)$ *ponton.*

Megoldás. *a)* A két pontot összekötő vektor $= (2,0,-3)$. Innen az egyenes explicit egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= 3 \\ z &= 4 - 3t \end{aligned}$$

második egyenlete $y = 3$ egy xz-síkkal párhuzamos sík egyenlete. A másik két egyenlet mindegyikéből kifejezve t-t, majd egyenlővé téve őket, egy másik sík egyenletét kapjuk. Az egyenes ennek a két síknak a metszésvonala. Az első egyenletből $t = \frac{1}{2}(x-1)$, a harmadikból $t = -\frac{1}{3}(z-4)$ hogy $3x + 2z = 11$. Így az előző egyeneshez a következő implicit (paraméter nélküli) egyenletrendszer tartozik, mely két sík egyenletéből áll:

$$\begin{array}{rrrl} 3x & & +2z & = 11 \\ & y & & = \ \ 3 \end{array}$$

b) A két pontot összekötő vektor itt $= (4,2,-6)$. Innen az egyenes explicit egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x &= 1 + 4t \\ y &= 3 + 2t \\ z &= 4 - 6t \end{aligned}$$

Mindegyik egyenletből kifejezve t-t, és ezeket egyenlővé téve kapjuk, hogy

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{-6}.$$

Ez a következő három sík egyenletét adja:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{2}, \quad \frac{z-4}{-6} = \frac{x-1}{4}, \quad \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{-6}.$$

Átrendezve

$$\begin{aligned} x - 2y \phantom{{}+2z} &= -5 \\ 3x \phantom{{}-2y} + 2z &= 11 \\ 3y + z &= 13 \end{aligned}$$

E három sík közül bármely kettő meghatározza az adott egyenest, így e három egyenlet közül bármely kettő az egyenes (implicit) egyenletrendszere. □

Térbeli pont egyenletei Csak a teljesség és az analógiák megértése céljából vizsgáljuk meg a tér egy pontjának lehetséges egyenleteit. A térbeli (x_0, y_0, z_0) pont explicit egyenletrendszere, illetve vektoregyenlete:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 \\ z &= z_0 \end{aligned} \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

Az explicit egyenletrendszert implicit alaknak is tekinthetjük, ekkor három – a koordinátasíkokkal párhuzamos – sík egyenletét látjuk, melyek egyetlen közös pontban metszik egymást.

$$\begin{aligned} x \phantom{{}+y+z} &= x_0 \\ y \phantom{{}+z} &= y_0 \\ z &= z_0 \end{aligned} \quad \text{vagy minden együtthatót kiírva} \quad \begin{aligned} x + 0y + 0z &= x_0 \\ 0x + y + 0z &= y_0 \\ 0x + 0y + z &= z_0 \end{aligned}$$

A síkbeli esethez hasonlóan egy pont implicit egyenletrendszerének tekinthetnénk három egyenletet, melyek egymást az adott pontban metsző egy-egy sík egyenletei. Tehát mondhatjuk, hogy a pont implicit egyenletrendszerének általános alakja:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z &= D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z &= D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z &= D_3 \end{aligned}$$

Itt is óvatosnak kell lennünk, mert nem minden ilyen alakú egyenletrendszer egy pont egyenletrendszere. Például három sík metszheti egymást egy egyenesben, de párhuzamos síkok esetén az is előfordulhat, hogy nincs közös pontjuk. E kérdés vizsgálatára visszatérünk a 2. fejezetben.

Egyenletek $\mathbb{R}^n$-ben Az egyenes és a sík explicit vektoregyenlete $\mathbb{R}^n$-ben is ugyanolyan alakú, mint $\mathbb{R}^3$-ben, azaz az egyenes explicit vektoregyenlete $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, a síké $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ alakú.

2.19. PÉLDA (EGYENES ÉS SÍK EXPLICIT VEKTOREGYENLETE). *Írjuk fel az $A(1,1,1,1)$, $B(2,3,2,4)$ pontokon átmenő egyenes, és az A, B és $C(3,2,1,0)$ pontokon átmenő sík explicit vektoregyenletét!*

MEGOLDÁS. Az $\overrightarrow{AB} = (1,2,1,3)$ és az $\overrightarrow{AC} = (2,1,0,-1)$ vektorok segítségével azonnal fölírható az egyenes és a sík egyenlete is:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ illetve } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$ □

A síkbeli egyenes és a térbeli sík vektoregyenlete $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = c$ alakú. E két esetben ez az egyenlet az n-dimenziós tér egy $n-1$-dimenziós alakzatának egyenlete ($n = 2,3$). A későbbiekben látni fogjuk, hogy ez általában is igaz, de e pillanatban még a dimenzió fogalmát sem definiáltuk, ezért egyelőre csak nevet adunk ennek az alakzatnak. Az $\mathbb{R}^n$ térben az $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = c$ egyenletet kielégítő $\mathbf{r}$ vektorok végpontjainak halmazát *hipersíknak* nevezzük. Koordinátás alakban

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = c,$$

ahol $\mathbf{n} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\mathbf{r} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

2.20. PÉLDA (HIPERSÍK EGYENLETE). *Mutassuk meg, hogy az*

$$x + 2y + 3z + 6w = 12$$

egyenletű hipersík bármely két pontját összekötő vektor merőleges az $(1,2,3,6)$ vektorra, azaz vele való skaláris szorzata 0.

MEGOLDÁS. Ha az (x_1, y_1, z_1, w_1) és az (x_2, y_2, z_2, w_2) pontok a megadott hipersíkon vannak, akkor

$$x_1 + 2y_1 + 3z_1 + 6w_1 = 12$$
$$x_2 + 2y_2 + 3z_2 + 6w_2 = 12$$

Ha a két egyenletet kivonjuk egymásból, akkor az

$$(x_1 - x_2) + 2(y_1 - y_2) + 3(z_1 - z_2) + 6(w_1 - w_2) = 0$$

egyenlethez jutunk, amely skalárszorzat alakban

$$(1,2,3,6) \cdot (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2, w_1 - w_2) = 0,$$

ami épp azt jelenti, hogy a két pontot összekötő vektor merőleges az $(1,2,3,6)$ vektorra. □

A következő táblázat összefoglalja geometriai alakzatoknak a további szempontjából legfontosabb egyenleteit. Az $\mathbb{R}^n$-beli egyenletek közül többet még nem ismerünk, ezeket három kérdőjel jelzi, viszont arra bíztatjuk az Olvasót, hogy az analógia fonalán haladva fogalmazza meg sejtéseit.

		Explicit vektoregyenlet	Implicit egyenlet(rendszer)
Síkban	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$Ax + By = C$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	$A_1x + B_1y = C_1$ $A_2x + B_2y = C_2$
Térben	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	$Ax + By + Cz = D$
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ $A_3x + B_3y + C_3z = D_3$
$\mathbb{R}^n$-ben	hipersík	???	$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$
	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	???
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	???
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	???

Feladatok

A lineáris egyenletrendszer és két modellje

E szakasz témája a lineáris egyenletrendszerek fogalma és a lineáris egyenletrendszer megoldásának két geometriai interpretációja: hipersíkok metszetének meghatározása és egy vektor lineáris kombinációként való előállítása. A számítások kényelmes könyvelésére bevezetjük a mátrix fogalmát.

Lineáris egyenlet és egyenletrendszer Az előző rész végén láttuk, hogy a síkbeli egyenes egyenletének általános alakja $Ax + By = C$, ahol A, B és C konstansok. Ennek általánosításaként jutunk a lineáris egyenlet fogalmához.[1]

[1] *Lineáris:* a *vonalas* jelentésű latin lineāris szóból ered, mely a *lenfonal*, *horgászzsinór*, átvitt értelemben *vonal*, *határvonal* jelentésű linea (līnea) szó származéka. A matematikában *egyenessel kapcsolatba hozható*, illetve *elsőfokú* értelemben szokás használni.

2.21. definíció (Lineáris egyenlet). *Az*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{2.16}$$

alakra hozható egyenletet az x_1, $x_2 \dots x_n$ ismeretlenekben lineáris egyenletnek *nevezzük, ahol a_1, $a_2, \dots$ és a_n, valamint b konstansok. Az a_1, $a_2, \dots$ és a_n konstansokat az egyenlet* együtthatóinak *b-t az egyenlet* konstans tagjának *nevezzük.*

2.22. példa (Lineáris egyenlet). *Az alábbi egyenletek lineárisak:*

$$x - 2y = 1, \quad \frac{1}{2}x_1 - \sqrt{2}x_2 + (5-\pi)x_3 = 0, \quad a\cos 0.87 - 0.15c = 0.23.$$

A következő egyenletek nem lineárisak az x, y és z ismeretlenekben:

$$xz - y = 0, \quad x + 2y = 3^z, \quad x\sin z + y\cos z + y = z^2,$$

viszont mindegyikük lineáris az x és y ismeretlenekben, hisz ekkor z paraméter, melynek bármely értéke mellett lineárisak az egyenletek.

2.23. példa (Lineáris egyenlet azonos átalakítása). *Az*

$$x = y, \quad x = 3 - y + 2z$$

egyenletek az x, y és z ismeretlenekben lineárisak, mert azonos átalakítással a definícióbeli alakra hozhatók:

$$x - y + 0z = 0, \quad x + y - 2z = 3.$$

Másrészt az

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 2 = 0$$

nem lineáris, mert a z-vel való beszorzás nem azonos átalakítás, tehát a lineáris $x + y + 2z = 0$ egyenlettel nem ekvivalens.

Lineáris egyenletek egy halmazát *lineáris egyenletrendszernek* nevezzük. Az egyenletrendszer ismeretlenei mindazok az ismeretlenek, amelyek legalább egy egyenletben szerepelnek. Ha egy ismeretlen egy egyenletben nem szerepel, akkor úgy tekintjük, hogy 0 az együtthatója. A jobb áttekinthetőség kedvéért az egyenletrendszereket úgy írjuk fel, hogy az ismeretlenek mindegyik egyenletben ugyanabban a sorrendben szerepeljenek. Egy egyenletrendszer egy egyenletből is állhat.

2.24. PÉLDA (LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK). *Lineáris egyenletrendszerek például a következők:*

$$\begin{aligned} 3x - y &= 2 \\ -x + 2y &= 6 \\ x + y &= 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 \phantom{{}+x_2+x_3} &= 3 \\ x_2 \phantom{{}+x_3} &= 1 \\ x_3 &= 4 \end{aligned} \qquad 2x - 3y + z - w = 6. \tag{2.17}$$

Elképzelhető, hogy egy egyenletrendszer átalakítása közben olyan egyenletet kapunk, melyben minden együttható 0, azaz amely $0 = b$ alakú. Az is lehet, hogy egy egyenletrendszerben egyes együtthatók paraméterek. Ilyenkor tudnunk kell, mely változók az ismeretlenek, melyek a paraméterek. Így a következő egyenletrendszerek is lineárisak az x, y ismeretlenekben:

$$\begin{aligned} ax + \phantom{\frac{1}{a}}y &= 2a \\ x - \frac{1}{a}y &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x - y &= 2 \\ -x + 2y &= 6 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 1 \\ 0 &= 2. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Paraméterek használatával felírható az összes olyan egyenletrendszer, mely adott számú egyenletből áll és adott számú ismeretlent tartalmaz. Például az összes 3-ismeretlenes, 2 egyenletből álló egyenletrendszer a következő alakú, illetve ilyenné alakítható:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \end{aligned}$$

2.25. DEFINÍCIÓ (LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER). Lineáris egyenletrendszer*en ugyanazokban a változókban lineáris egyenletek egy véges halmazát értjük. Általános alakja m egyenlet és n ismeretlen esetén*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{2.19}$$

ahol x_1, x_2,... x_n az ismeretlenek, a_{ij} az i-edik egyenletben az x_j ismeretlen együtthatóját jelöli, és b_i az i-edik egyenlet konstans tagja. Ha mindegyik *egyenlet konstans tagja* 0*, a lineáris egyenletrendszer* homogén*, ha csak egy is különbözik* 0*-tól* inhomogén*.*

2.26. DEFINÍCIÓ (LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA). *Azt mondjuk, hogy a rendezett* $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *szám-n-es* megoldása *a (2.19) egyenletrendszernek, ha megoldása minden egyenletnek, azaz minden egyenletet kielégít az* $x_1 = u_1$*,* $x_2 = u_2, \ldots$ $x_n = u_n$ *helyettesítéssel. Ha e szám-n-est vektornak tekintjük,* megoldásvektorról *beszélünk. Az összes megoldás halmazát az egyenletrendszer* megoldáshalmaz*ának nevezzük. Egy egyenletrendszert* megoldhatónak *vagy* konzisztensnek *nevezünk, ha van megoldása, azaz ha megoldáshalmaza nem üres. Ellenkező esetben az egyenletrendszer* nem megoldható *vagy* inkonzisztens*.*

2.27. PÉLDA (EGYENLETRENDSZER EGY MEGOLDÁSA). *Keressük meg a (2.17) és a (2.18) egyenletrendszereinek egy-egy megoldását!*

MEGOLDÁS. $(x, y) = (2, 4)$, $(x_1, x_2, x_3) = (3, 1, 4)$, $(x, y, z, w) = (2, 0, 2, 0)$, $(x, y) = (1, a)$, $(x, y) = (2, 4)$. A (2.17)-beli harmadik egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, például egy másik megoldás az $(x, y, z, w) = (3, 0, 0, 0)$. A (2.18) utolsó egyenletrendszerének nincs megoldása, hisz nincs olyan x és y érték, melyre fönnállna a $0x + 0y = 2$ egyenlőség. □

Általában, a

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$$

egyenletnek minden szám-n-es megoldása, míg a

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b, \quad (b \neq 0)$$

egyenletnek egyetlen megoldása sincs.

Ekvivalens lineáris egyenletrendszerek Tekintsük az alábbi három egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Mindháromnak $(x, y) = (2, 1)$ az egyetlen megoldása.

2.28. DEFINÍCIÓ (EKVIVALENS EGYENLETRENDSZEREK). *Azonos ismeretlenekkel felírt két egyenletrendszert* ekvivalensnek *nevezünk, ha megoldásaik halmaza azonos.*

2.29. TÉTEL (EKVIVALENS ÁTALAKÍTÁSOK). *Az alábbi transzformációk minden egyenletrendszert ekvivalens egyenletrendszerbe visznek át:*

1. *két egyenlet felcserélése;*
2. *egy egyenlet nem nulla számmal való szorzása;*

Ha egy egyenletrendszer több egyenletből áll, mint ahány ismeretlene van, *túlhatározottnak* nevezzük, míg ha kevesebb egyenletből áll, *alulhatározottnak*. E fogalmak időnként félrevezető megfogalmazásokhoz és téves következtetésekre vezetnek, ha az az elképzelés alakul ki, hogy a túlhatározottság azt jelenti: az egyenletek (a feltételek) már „túl sokan” vannak ahhoz, hogy akár csak egy szám-n-es is kielégítse. Később látni fogjuk, hogy ezzel ellentétben nem a „túl sok” egyenlet, hanem az egymásnak ellentmondó egyenletek okozzák az inkonzisztenciát. Hasonlóképp az alulhatározottság nem jelenti azt, hogy szükségképpen több megoldás is van. Alulhatározott egyenletrendszer is lehet inkonzisztens. Egyedül annyi mondható: alulhatározott egyenletrendszernek nem lehet csak egyetlen megoldása.

3. egy egyenlet konstansszorosának egy másikhoz adása.
Ezen kívül
4. egy $0 = 0$ *alakú egyenlet elhagyása*
is ekvivalens átalakítás, de ez eggyel csökkenti az egyenletek számát.

BIZONYÍTÁS. Az első kettő és a negyedik átalakítás nyilvánvalóan nem változtatja meg a megoldások halmazát (a negyedikkel kapcsolatban lásd a 2.8. feladatot). Nézzük a harmadik átalakítást: legyen c egy tetszőleges konstans. Egy megoldást az egyenletrendszerbe helyettesítve, majd az i-edik c-szeresét hozzáadva egy másik egyenlethez, például a j-edikhez, könnyen látható, hogy a *régi* egyenletrendszer minden megoldása az *újnak* is megoldása. Ezután az új egyenletrendszer i-edik egyenletének $-c$-szeresét hozzáadjuk a j-edikhez. Így visszakapjuk a régi egyenletrendszert, tehát az előző gondolatmenet szerint az *új* egyenletrendszer minden megoldása a *réginek* is megoldása. Vagyis a két megoldáshalmaz megegyezik. Tehát ez az átalakítás is ekvivalens. □

Mátrixok Az egyenletrendszer megoldásában az ekvivalens átalakítások során a műveleteket csak az egyenletrendszer együtthatóival és konstans tagjaival végezzük, az ismeretlenek másolgatása felesleges, ezért az együtthatókat és a konstans tagokat egy táblázatba gyűjtjük – megőrizve az egyenletrendszerbeli egymáshoz való helyzetüket –, és az egyenletrendszer megoldásainak lépéseit csak ezen hajtjuk végre. Az ilyen számtáblázatokat *mátrixoknak* nevezzük, ezekkel később külön fejezetben foglalkozunk. A mátrixba írt számokat a *mátrix elemeinek* nevezzük.

Mátrix: a latin mater (māter) (*anya*, *szülőanya*, *forrás*) szó származéka a matrix (mātrīx), melynek jelentése az európai nyelvekben a következő változásokon ment át: *anyaállat*, *vemhes állat*, *anyaméh*, *bezárt hely, ahonnan valami kifejlődik*, *bezárt*, *körülzárt dolgok sokasága*, *tömbje*. Jelentése az élettanban méh, a geológiában finomszemcsés kő, melybe fossziliák, kristályok, drágakövek vannak zárva, az anatómiában a körmöt, fogat kialakító szövet.

A mátrix méretének jellemzéséhez mindig előbb a sorok, majd az oszlopok számát adjuk meg, tehát egy $m \times n$-es mátrixnak m sora és n oszlopa van. Egy ilyen mátrix általános alakja:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

A mátrix *főátlójába* azok az elemek tartoznak, amelyek ugyanannyiadik sorban vannak, mint ahányadik oszlopban, azaz a például a fenti mátrixban a főátló elemei $a_{11}, a_{22}, \dots$.

A vektorokat is szokás *mátrix jelöléssel*, *mátrix alakban*, azaz egy 1-soros vagy 1-oszlopos mátrixszal leírni – ahogy azt az első fejezetben mi is tettük. Az $n \times 1$-es mátrixot *oszlopvektornak* vagy *oszlopmátrixnak*, az $1 \times n$-es mátrixot *sorvektornak sormátrixnak* is szokás nevezni. Annak a kérdésnek az eldöntése, hogy egy n-dimenziós vektort sor- vagy oszlopvektorral reprezentáljunk, döntés (szokás, ízlés) kérdése. Ma-

VEKTOROK MAGYAR IRODAI és általános iskolában használt jelölése – a tizedes vessző használata miatt – pontosvesszőt tesz a *vektor koordinátái* közé *elválasztójelként*. Magyar nyelvű felsőbb matematika szövegekben ez nem szokás, mi is elkerüljük, és tizedespontot, vektor koordinátái közt vesszőt használunk. Vegyük észre, hogy vektorok sorvektorral (sormátrixszal) való megadásnál írásjelet nem használunk, csak szóközzel választjuk el a koordinátákat!

napság jobban el van terjedve a vektorok oszlopvektoros jelölése, ezért e könyvben alapértelmezésként mi is ezt a jelölést fogjuk használni, de egyes témáknál a másik használatát is bemutatjuk. Így tehát az $(1, 2)$ vektornak megfelelő sorvektor és oszlopvektor alakja

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ illetve } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

amelyek közül, ha mást nem mondunk, az utóbbit fogjuk a vektor mátrixos jelöléseként használni.

Egyenletrendszer mátrixa és bővített mátrixa Az egyenletrendszer *együtthatómátrixa* az egyenletek együtthatóit, míg *bővített* mátrixa, vagy egyszerűen csak *mátrixa* az egyenletek együtthatóit és konstans tagjait tartalmazza. Az áttekinthetőség érdekében a bővített mátrixban egy függőleges vonallal választhatjuk el az együtthatókat a konstans tagoktól. A 2.25. definícióbeli általános alak együttható- és bővített mátrixa:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

A gyakorlatban nagy méretű egyenletrendszereket, s így nagy méretű mátrixokat is kezelni kell. Ezekben az elemek nagy része általában 0. Az ilyen mátrixokat *ritka mátrixoknak* nevezzük. Szokás az ilyen együtthatómátrixú egyenletrendszereket is ritkának nevezni. A nem ritka mátrixokat *sűrűnek* nevezzük. Előbb a kis méretű sűrű mátrixokra hatékony módszerekkel ismerkedünk meg.

2.30. PÉLDA (MÁTRIX HASZNÁLATA A MEGOLDÁSHOZ). *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!*

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 2z &= 7 \\ x + y + z &= 3 \\ 2x + 2y + 3z &= 6 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Két lehetséges megoldást mutatunk. A (2.20) egyenletrendszereinél látott háromszög, illetve átlós alak elérése a cél. Először írjuk fel az egyenletrendszer bővített mátrixát!

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 2z &= 7 \\ x + y + z &= 3 \\ 2x + 2y + 3z &= 6 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

Kicseréljük az első két egyenletet:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + 3y + 2z &= 7 \\ 2x + 2y + 3z &= 6 \end{aligned}$$

Kicseréljük az első két sort:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

Az első egyenlet 2-szeresét kivonjuk a második, majd a harmadik egyenletből (azaz -2-szeresét hozzáadjuk a második majd a harmadik egyenlethez).

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ y &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Az első sor kétszeresét kivonjuk a második és harmadik sorból (azaz az első sor -2-szeresét hozzáadjuk a második majd a harmadik sorhoz).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Az egyenletrendszerről azonnal leolvasható y és z értéke. Ezeket az első egyenletbe helyettesítve megkapjuk x értékét is, nevezetesen $x + y + z = 3$, azaz $y = 1$ és $z = 0$ behelyettesítése után: $x + 1 + 0 = 3$, vagyis $x = 2$. Másik megoldási módszerhez jutunk, ha a visszahelyettesítés helyett folytathatjuk az ekvivalens átalakítások sorozatát:

Kivonjuk a második, majd a harmadik egyenletet az elsőből:

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Kivonjuk a második, majd a harmadik sort az elsőből:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Így olyan alakra hoztuk az egyenletrendszert, illetve a bővített mátrixot, amiből azonnal leolvasható a megoldás: $(x, y, z) = (2, 1, 0)$. □

Sormodell: hipersíkok metszete A lineáris egyenletrendszerek szemléltetésére két geometriai modellt mutatunk, melyek segíteni fognak az általánosabb fogalmak megértésében, szemléltetésében.

A sormodell lépései jól nyomon követhetők a SagePlayer sormodell című demonstrációján. Ott saját bővített mátrixokkal is lehet kísérletezni.

Tekintsük a kétváltozós lineáris $ax + by = c$ egyenletet, ahol a, b és c valós konstansok. Ha a és b legalább egyike nem 0, akkor az egyenletet kielégítő pontok halmaza egy egyenes, vagyis a megoldáshalmaz egy egyenest alkot. (Ha $a = b = c = 0$, akkor az egyenlet alakja $0x + 0y = 0$, azaz $0 = 0$, ami minden (x, y) számpárra fennáll, vagyis az egyenletet kielégítő (x, y) pontok halmaza az egész sík. Ha pedig $a = b = 0$, de $c \neq 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása.)

2.31. példa (Sormodell két kétismeretlenes egyenlettel). *Oldjuk meg az*

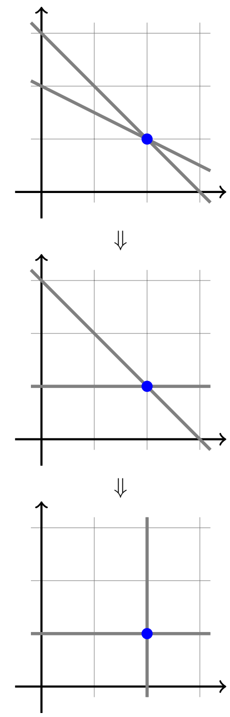
$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

egyenletrendszert ekvivalens átalakításokkal, és ábrázoljuk minden lépésben.

MEGOLDÁS. Két lépésben megoldhatjuk az egyenletrendszert, ha az első egyenletet kivonjuk a másodikból, majd az így kapott egyenletrendszerben a második egyenletet kivonjuk az elsőből, azaz:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer két egyenlete egy-egy egyenes egyenlete a síkban. Az, hogy az egyenletrendszer megoldható, pontosan azt jelenti, hogy a két egyenesnek van közös pontja, példánkban a $(2, 1)$ pont. A 2.6 ábra a megoldás lépéseit szemlélteti az egyenletek grafikonjával. □



2.6. ábra: Egyenletrendszer megoldásának szemléltetése

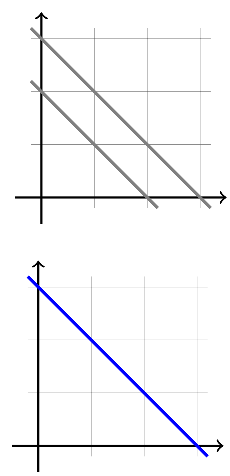
2.32. PÉLDA (HA 0 LESZ A BAL OLDAL). *Vizsgáljuk meg az alábbi egyenletrendszert a sormodellben!*

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Látható, hogy ez két párhuzamos egyenes egyenlete, melyeknek nincs közös pontjuk, így az egyenletrendszer nem oldható meg. Ha az első egyenletet kivonjuk a másodikból, az ellentmondó $0 = -1$ egyenletet kapjuk, vagyis így is arra jutottunk, hogy az egyenletrendszer nem oldható meg. Az

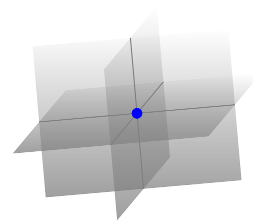
$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + y &= 3 \end{aligned}, \quad \text{vagy az} \quad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x + 2y &= 6 \end{aligned}$$

egyenletrendszerekben az első egyenlettel a második $0 = 0$ alakra hozható, aminek minden számpár megoldása, így elhagyható. Így csak az $x + y = 3$ egyenlet marad. Ennek összes megoldása paraméteres alakba írva például $(x, y) = (3 - t, t)$. □

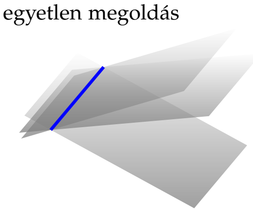


2.7. ábra: A megoldás szemléltetése, ha a két egyenlet egyikének bal oldala nullává tehető

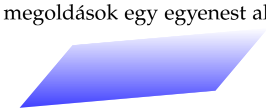
2.33. PÉLDA (SORMODELL HÁROM HÁROMISMERETLENES EGYENLETTEL). *Vizsgáljuk meg, hogy három háromismeretlenes egyenletből álló egyenletrendszer megoldásainak halmaza milyen geometriai alakzatot adhat!*



(a) Három általános helyzetű sík: egyetlen megoldás



(b) Egy egyenesen átmenő, de nem csupa azonos sík: végtelen sok megoldás, a megoldások egy egyenest alkotnak



(c) Azonos síkok: végtelen sok megoldás, a megoldások egy síkot alkotnak

2.8. ábra: Megoldható egyenletrendszerek ábrázolása (a megoldáshalmazt kék szín jelzi)

MEGOLDÁS. Ha a három egyenlettel meghatározott három sík általános helyzetű, akkor az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van (ld. 2.8. (a) ábra). Például a 2.30. példában szereplő egyenletrendszernek egyetlen megoldása van: $(x, y, z) = (2, 1, 0)$.

Tekintsük a

$$\begin{aligned} 2x + y + 2z &= 5 \\ x + y + z &= 3 \\ 3x + 2y + 3z &= 8 \end{aligned} \tag{2.21}$$

egyenletrendszert. Ennek egy megoldása $(x, y, z) = (2, 1, 0)$, ugyanakkor a három sík normálvektorai egy síkba esnek, ugyanis

$$(2, 1, 2) + (1, 1, 1) = (3, 2, 3).$$

Mivel mindhárom normálvektorra merőleges például a

$$(2, 1, 2) \times (1, 1, 1) = (-1, 0, 1)$$

vektor, ezért e vektor párhuzamos mindhárom síkkal. A $(2, 1, 0)$ ponton átmenő, és $(-1, 0, 1)$ irányvektorú egyenes tehát benne van mindhárom síkban (ilyen esetet ábrázol a 2.8. (b) ábra). Az összes megoldást tehát megadja ennek az egyenesnek a paraméteres vektoregyenlete:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Hamarosan ugyanezt a megoldást ekvivalens átalakításokkal is meg fogjuk tudni határozni.

Hasonló esetet ábrázol a 2.9. *(b)* ábra, ahol mindhárom sík párhuzamos egy egyenessel, de a síkok egymással nem párhuzamosak, viszont a 2.8. *(b)* esettel ellentétben az egyenletrendszernek nincs megoldása. Ilyen például a (2.21) kis változtatásával kapott

$$\begin{aligned} 2x + y + 2z &= 5 \\ x + y + z &= 3 \\ 3x + 2y + 3z &= 9 \end{aligned} \tag{2.22}$$

egyenletrendszer. Vegyük észre, hogy míg a (2.21) egyenletrendszerben a harmadik egyenletből kivonva az első kettőt az elhagyható $0 = 0$ egyenletet kapjuk, addig a (2.22) egyenletrendszerben az ellentmondó $0 = 1$ egyenletre jutunk. Így ennek az egyenletrendszernek nincs megoldása.

Végül tekintsük az

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + 2y + 2z &= 6 \\ 3x + 3y + 3z &= 9 \end{aligned} \tag{2.23}$$

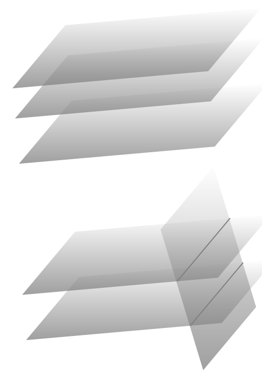
egyenletrendszert! Látható, hogy a második és a harmadik egyenlet az első konstansszorosa, azaz ugyanannak a síknak az egyenletei, az egyenletrendszer tehát ekvivalens az egyetlen

$$x + y + z = 3$$

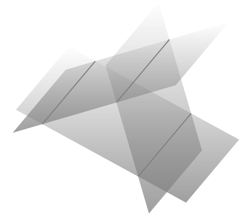
egyenletből álló egyenletrendszerrel. Az y-nak és z-nek tetszőleges értéket választunk, például legyen $y = s$, $z = t$, akkor $x = 3 - y - z$, azaz $x = 3 - s - t$. Így az összes megoldás: $(x, y, z) = (3 - s - t, s, t)$. Ezt oszlopvektorokkal fölírva kapjuk, hogy a megoldás

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ez a 2.8. *(c)* ábra szerint eset. A 2.9. *(a)*-beli eseteknek megfelelő egyenletrendszerek felírását az olvasóra hagyjuk. □



(a) A síkok közül legalább kettő párhuzamos, de nem azonos



(b) Egy egyenessel párhuzamos, de közös egyenest nem tartalmazó három sík

2.9. ábra: Nem megoldható egyenletrendszerek

Az előző példákban a 2- és 3-dimenziós térben szemléltettük a 2-, illetve 3-ismeretlenes egyenletrendszer megoldásait. E geometriai modell lényege a következőképp foglalható össze az n-ismeretlenes esetben:

2.34. ÁLLÍTÁS (SORMODELL). *Ha egy n-ismeretlenes egyenlet bal oldalán nem minden együttható 0, akkor az egyenletet kielégítő pontok (azaz az egyenlet megoldásai) egy hipersíkot alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben. Ha egy n-ismeretlenes egyenletrendszer m ilyen egyenletből áll, akkor az egyenletrendszer megoldása a nekik megfelelő m hipersík közös része $\mathbb{R}^n$-ben.*

Az m egyenlet a skaláris szorzás segítségével tömörebb alakban is fölírható. Az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszer i-edik egyenletének alakja

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i.$$

Ha $\mathbf{a}_{i*}$ jelöli az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorát, ez az egyenlet vektorok skaláris szorzataként is felírható:

$$\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = b_i. \tag{2.24}$$

Ez különösen akkor lesz érdekes, ha homogén lineáris egyenletrendszereket fogunk vizsgálni, mert ott mindegyik egyenlet $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = 0$ alakot ölt, ami azt jelenti, hogy olyan $\mathbf{x}$ vektort keresünk, mely merőleges az $\mathbf{a}_{i*}$ vektorok mindegyikére.

Az oszlopmodell lépései jól nyomon követetők a SagePlayer oszlopmodell című demonstrációján. Ott saját bővített mátrixokkal is lehet kísérletezni.

Oszlopmodell: vektor előállítása lineáris kombinációként E modellben az egyenletrendszerre úgy tekintünk, mint egy olyan vektoregyenletre, amelyben egy vektort kell előállítani adott vektorok lineáris kombinációjaként. Például a 2.31. példabeli

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

egyenletrendszer ekvivalens az

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} y = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$$

vektoregyenlettel. Itt az a feladat, hogy megkeressük az $(1,1)$ és $(1,2)$ vektoroknak azt a lineáris kombinációját, amely egyenlő a $(3,4)$ vektorral.

2.35. PÉLDA (A MEGOLDÁS LÉPÉSEI AZ OSZLOPMODELLBEN). *Kövessük végig a fenti egyenletrendszer 2.31. példában adott megoldásának lépéseit e modellben is.*

MEGOLDÁS. Az ekvivalens átalakítások lépései:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Vektoros alakban:

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} y = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} y = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} y = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}.$$

E lépéseket szemléltetjük a 2.10 ábrán. □

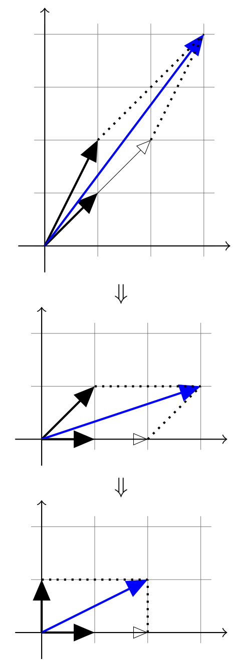
Általánosan kimondható a következő:

2.36. ÁLLÍTÁS (OSZLOPMODELL). *A 2.25. definícióban megadott (2.19) egyenletrendszer a következő vektoregyenlettel ekvivalens:*

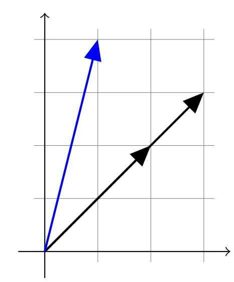
$$\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix} x_2 + \ldots + \begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}$$

Az egyenletrendszer megoldása ekvivalens egy vektoregyenlet megoldásával, ahol az egyenletrendszer konstans tagjaiból álló vektort kell az együtthatómátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként előállítani.

E modellben egy egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha az együtthatómátrix oszlopvektorainak összes lineáris kombinációjából álló halmazban a konstans tagokból álló vektor is szerepel (ld. 2.10. feladat).



2.10. ábra: A megoldás lépései a vektormodellben.



2.11. ábra: Tekintsük a nyilvánvalóan ellentmondó $2x + 3y = 1$, $2x + 3y = 4$ egyenletrendszert, és annak oszlopmodell alakját: $(2,2)x + (3,3)y = (1,4)$. Mivel a $(2,2)$ és a $(3,3)$ vektorok lineáris kombinációjaként csak (c,c) alakú vektor állítható elő, az $(1,4)$ vektor nem, ezért a fenti egyenletrendszernek nincs megoldása.

Feladatok

2.1.• Melyek lineáris egyenletek az x, y és z változókban az alábbiak közül?

a) $3x - (\ln 2)y + e^3 z = 0.4$ *b)* $a^2 x - b^2 y = 0$
c) $xy - yz - zx = 0$ *d)* $(\sin 1)x + y - \pi z = 0$
e) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ *f)* $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$

Igazoljuk, hogy az alábbi egyenletrendszerek ekvivalensek!

2.2. $\left.\begin{aligned} x + 3y &= 5 \\ y &= 1 \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x \quad &= 2 \end{aligned}\right\}$

2.3. $\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 2 \\ 0x + 0y &= 3 \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x + y &= 7 \end{aligned}\right\}$

Oldjuk meg (fejben számolva) az alábbi lineáris egyenletrendszereket az $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ paraméterválasztás esetén!

2.4. $\left.\begin{aligned} (2a - b)x + (3a - c)y &= 0 \\ (3b - 2c)x + (b - 2a)y &= 0 \end{aligned}\right\}$

2.5. $\left.\begin{aligned} (b - a)x + (3a - c)y &= 1 \\ (3b - 2c)x + (b - 2a)y &= 0 \end{aligned}\right\}$

2.6. $\left.\begin{aligned} (b - a)x + (3a - c)y &= 1 \\ (3b - 2c)x + (b - 2a)y &= 1 \end{aligned}\right\}$

2.7. $\left.\begin{aligned} (b - a)x + (3a - c)y &= 1 \\ (3b - 2c)x + \quad (c - b)y &= 2 \end{aligned}\right\}$

2.8. EGYENLETRENDSZEREK KÖZÖS MEGOLDÁSA Tekintsük az azonos ismeretleneket tartalmazó $\mathcal{E}_1$ és $\mathcal{E}_2$ egyenletrendszereket. Legyen ezek megoldáshalmaza $\mathcal{M}_1$, illetve $\mathcal{M}_2$. Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{E}$ az $\mathcal{E}_1$ és $\mathcal{E}_2$ egyenletrendszerek egyesítése, azaz $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$, és $\mathcal{M}$ az $\mathcal{E}$ megoldáshalmaza, akkor $\mathcal{M}$ az $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$ közös része, azaz $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$.

Vizsgáljuk meg ezt állítást az alábbi esetekben:

a) $\mathcal{E}_1 = \{\, x + y = 2 \}$, $\mathcal{E}_2 = \{\, x - y = 0 \,\}$;
b) $\mathcal{E}_1 = \{\, x + y = 2,\ x - y = 0 \}$, $\mathcal{E}_2 = \{\, x - y = 0 \,\}$;
c) $\mathcal{E}_1 = \{\, x + y = 2,\ x - y = 0 \}$, $\mathcal{E}_2 = \{\, x - y = 1 \,\}$;
d) $\mathcal{E}_1 = \{\, x + y = 2,\ x - y = 0 \}$, $\mathcal{E}_2 = \{\, 0x + 0y = 0 \,\}$;
e) $\mathcal{E}_1$ tetszőleges egyenletrendszer, $\mathcal{E}_2 = \{\, 0 = 0 \,\}$.

2.9.• SOR ÉS OSZLOPMODELL Rajzoljuk fel a következő két egyenletrendszerhez tartozó sormodell és oszlopmodell szerinti ábrát!

a) $\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ 3x - 2y &= 4 \end{aligned}$ *b)* $\begin{aligned} 2x + 4y &= 3 \\ 3x + 6y &= 4 \end{aligned}$

2.10. SOR- ÉS AZ OSZLOPMODELL 3D-BEN Vizsgáljuk meg az alábbi két – azonos együtthatómátrixú – egyenletrendszer megoldhatóságát a sor- és az oszlopmodellben:

$$\begin{aligned} x + \ \ y + 2z &= 3 \\ x + 2y + 4z &= 3 \\ 3x + 4y + 8z &= 9 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + \ \ y + 2z &= 3 \\ x + 2y + 4z &= 3 \\ 3x + 4y + 8z &= 1 \end{aligned}$$

2.11. SOR ÉS OSZLOPMODELL $m \neq n$ ESETÉN Vizsgáljuk meg az alábbi három egyenletrendszer megoldhatóságát a sor- és az oszlopmodellben:

$$a)\ \begin{aligned} x + \ \ y &= 3 \\ x + \ \ y &= 4 \\ x + 3y &= 5 \end{aligned} \qquad b)\ \begin{aligned} x + \ \ y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \\ x + 3y &= 5 \end{aligned} \qquad c)\ \begin{aligned} x + \ \ y &= 3 \\ x + 2y &= 3 \\ x + 3y &= 5 \end{aligned}$$

2.12.• IGAZ – HAMIS Mely állítások igazak, melyek hamisak az alábbiak közül?

a) Ha egy n-ismeretlenes egyenletrendszer olyan hipersíkok egyenleteiből áll, melyek közt van két párhuzamos, akkor az egyenletrendszer nem oldható meg.

b) Ha egy n-ismeretlenes egyenletrendszer nem oldható meg, akkor az egyenletek olyan hipersíkok egyenletei, melyek közt van két párhuzamos, de nem azonos hipersík.

c) Ha egy n-ismeretlenes egyenletrendszer csak két egyenletből áll, akkor az oszlopmodell szerint pontosan akkor oldható meg tetszőleges jobb oldal esetén, ha a vektoregyenlet bal oldalán szereplő vektorok közt van kettő lineárisan független.

2.13.• Egészítsük ki az alábbi állításokat úgy, hogy igazak legyenek!

a) Egy két egyenletből álló háromismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra a(z) ..-dimenziós térben .. darab ......ból/ből áll, melyek ha ...., akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása, egyébként megoldásainak száma .... Oszlopmodellje a(z) ..-dimenziós térben .. darab ....ból/ből áll.

b) Egy három egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra a(z) ..-dimenziós térben .. darab ....ból/ből áll, míg az oszlopmodellje a ..-dimenziós térben .. darab ......ból/ből.

c) Egy négy egyenletből álló ötismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra a(z) ..-dimenziós térben .. darab ....ból/ből áll. Oszlopmodellje a(z) ..-dimenziós térben .. darab ....-ból/ből áll.

Megoldás kiküszöböléssel

Elemi sorműveletek A lineáris egyenletrendszerek egyik megoldási módszerének lényege, hogy ekvivalens átalakításokkal olyan alakra hozzuk az egyenletrendszert, melyből visszahelyettesítések után, vagy azok nélkül azonnal leolvasható az eredmény. Az átalakításokat a bővített mátrixon hajtjuk végre úgy, hogy a nekik megfelelő átalakítások az egyenletrendszeren ekvivalens átalakítások legyenek. A 2.29. tételben felsorolt első három ekvivalens átalakítás nem változtatja meg az egyenletrendszer egyenleteinek számát sem. Az egyenletrendszer bővített mátrixán az ezeknek megfelelő átalakításokat elemi sorműveleteknek nevezzük.[2]

[2] Lineáris egyenletrendszerek felírása és megoldása már időszámításunk előtt 300 körül babiloni iratokban szerepelt. Az első századra teszik a kínai Jiǔzhāng Suànshù című mű megjelenését, mely az előző ezer évben összegyűlt matematikai tudást foglalja össze (címének magyar fordítása „A matematikai művészet kilenc fejezete” vagy „Kilenc fejezet a matematikai eljárásokról” lehet). E műben már a kiküszöbölés (azaz a Gauss-elimináció) néven ismert technikát alkalmazzák lineáris egyenletrendszer megoldására. A két fenti műben szereplő egyenletrendszerek, és további történeti részletek olvashatók a The MacTutor History of Mathematics archive című weboldalon.

2.37. definíció (Elemi sorműveletek). *Egy mátrix sorain végzett alábbi műveleteket* elemi sorműveleteknek *nevezzük:*

1. Sorcsere: *két sor cseréje.*
2. Beszorzás: *egy sor beszorzása egy nemnulla számmal.*
3. Hozzáadás: *egy sorhoz egy másik sor konstansszorosának hozzáadása.*

Természetesen egy sort el is oszthatunk egy nemnulla c számmal, hisz az az $1/c$-vel való beszorzással egyenértékű. Hasonlóképp levonhatjuk egy sorból egy másik sor c-szeresét, hisz az a $-c$-szeresének hozzáadásával ekvivalens.

Az elemi átalakításokra a következő jelöléseket fogjuk használni:

1. $S_i \leftrightarrow S_j$: az i-edik és a j-edik sorok cseréje.
2. cS_i: az i-edik sor beszorzása c-vel.
3. $S_i + cS_j$: a j-edik sor c-szeresének az i-edik sorhoz adása.

Az elemi sorműveletek mintájára elemi oszlopműveletek is definiálhatók, de azokat ritkán használjuk. Jelölésükre értelemszerűen az $O_i \leftrightarrow O_j$, cO_i, $O_i + cO_j$ formulákat használjuk.

Lépcsős alak Az eddig megoldott egyenletrendszerekben igyekeztünk átlós, vagy legalább átló alatt kinullázott alakra hozni az egyenletrendszert, mint azt például a 2.30. példában tettük. Ez nem mindig sikerül, mert néha nem kívánt elemek is kinullázódnak, de a következőkben definiált lépcsős alakhoz mindig el tudunk jutni.

2.38. definíció (Lépcsős alak). *Egy mátrix* lépcsős, *vagy* sorlépcsős alakú, *ha kielégíti a következő két feltételt:*

1. *a csupa* 0*-ból álló sorok (ha egyáltalán vannak) a mátrix utolsó sorai;*
2. *bármely két egymás után következő nem-0 sorban az alsó sor elején (legalább eggyel) több* 0 *van, mint a fölötte lévő sor elején.*

A nemnulla sorok első zérustól különböző elemét főelemnek, vezérelemnek *vagy* pivotelemnek *hívjuk. Egy főelem oszlopának* főoszlop *vagy* bázisoszlop *a neve.*

2.39. PÉLDA (LÉPCSŐS ALAK). *A következő mátrixok lépcsős alakúak:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gauss-módszer A *Gauss-módszer* vagy más néven *Gauss-kiküszöbölés* vagy *Gauss-elimináció* a lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy módszere. Lényege, hogy a lineáris egyenletrendszer bővített mátrixát elemi sorműveletekkel lépcsős alakra hozzuk, és abból visszahelyettesítéssel meghatározzuk a megoldás általános alakját. A Gauss-módszer könnyen algoritmizálható, ha sorban haladunk az oszlopokon. A módszerre láttunk már példát, ilyen volt a 2.30. példa első megoldása. Most lássunk két további példát.

2.40. PÉLDA (GAUSS-MÓDSZER, EGY MEGOLDÁS). *Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-módszerrel:*

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 2x + 2y + 3z &= 2 \\ x + 3y + 3z &= 4 \\ x + 2y + z &= 5 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Írjuk fel az egyenletrendszer bővített mátrixát, és oszloponként haladva küszöböljük ki – nullázzuk ki – a főelemek alatti elemeket!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right] \overset{\substack{S_2-2S_1 \\ S_3-S_1 \\ S_4-S_1}}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \overset{S_2 \leftrightarrow S_3}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \overset{S_4-\frac{1}{2}S_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 3 \end{array}\right] \overset{S_4-\frac{3}{2}S_3}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 2y + z &= 4 \\ -z &= 2 \end{aligned}$$

A harmadik egyenletből $z = -2$, ezt a másodikba helyettesítve $y = 3$, ezeket az elsőbe helyettesítve kapjuk, hogy $x = 1$, azaz az egyetlen megoldás $(x, y, z) = (1, 3, -2)$. □

Mit csinálunk akkor, ha a lépcsős alak szerint kevesebb a főelemek, mint az oszlopok száma? Egyelőre bevezetünk két elnevezést, melyek jelentése hamarosan világos lesz: az egyenletrendszer azon változó-it, melyek főelemek oszlopaihoz tartoznak, *kötött változóknak*, míg az összes többi változót *szabad változónak* nevezzük.

2.41. PÉLDA (GAUSS-MÓDSZER, VÉGTELEN SOK MEGOLDÁS). *Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-módszerrel:*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 &= 1 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Írjuk fel az egyenletrendszer bővített mátrixát, és oszloponként haladva küszöböljük ki a főelemek alatti elemeket!

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 & 1 \end{array}\right] \overset{S_2-S_1}{\underset{}{\overset{S_3-3S_1}{\Longrightarrow}}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right] \overset{S_3-2S_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 1 \\ 2x_3 + x_4 &= -1 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer kötött változói a lépcsős alak főoszlopaihoz tartozó változók, azaz x_1 és x_3. A szabad változók: x_2, x_4, x_5. A szabad változóknak tetszőleges értékeket adhatunk, a kötöttek értéke kifejezhető velük. Legyen például a szabad változók értéke $x_2 = s$, $x_4 = t$, $x_5 = u$. Ezek behelyettesítése után a fenti egyenletek közül először a másodikból kifejezzük x_3-at, majd azt behelyettesítjük az elsőbe, ahonnan kifejezzük az x_1-et, azaz a fenti egyenletekből kifejezzük a kötött változókat:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u \\ x_3 &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \end{aligned}$$

. Innen az egyenletrendszer megoldása

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u, s, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, t, u),$$

vagy mátrixjelöléssel

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Később különösen az utóbbi – vektorok lineáris kombinációjára bontással való – felírás lesz hasznos. □

Világos, hogy ha a szabad változóknak tetszőleges értéket adhatunk, melyből a kötött változók egyértelműen kifejezhetők, akkor a fenti példában mutatott módszerrel az egyenletrendszer összes megoldását leírtuk. Az ilyen módon megadott megoldást az egyenletrendszer *általános megoldásának*, a konkrét paraméterértékekhez tartozó megoldásokat *partikuláris megoldásnak* nevezzük. Például az előző példabeli egyenletrendszer egy partikuláris megoldása az $s = 0$, $t = 1$, $u = 2$ értékekhez tartozó

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-2, 0, -1, 1, 2).$$

Lényeges e megoldási módban, hogy a bővített mátrixot lépcsős alakra tudtuk hozni. Ez vajon mindig sikerül?

2.42. TÉTEL (LÉPCSŐS ALAKRA HOZÁS). *Bármely mátrix elemi sorműveletekkel* lépcsős *alakra hozható.*

BIZONYÍTÁS. Tekintsünk egy tetszőleges $m \times n$-es mátrixot. A következő eljárás egyes lépéseiben e mátrixnak le fogjuk takarni egy-egy sorát vagy oszlopát. Az egyszerűség kedvéért a letakarás után keletkezett mátrix sorainak és oszlopainak számát ismét m és n fogja jelölni, a_{ij} pedig a letakarások után maradt mátrix i-edik sorának j-edik elemét.

1. Ha az első oszlopban csak 0 elemek állnak, takarjuk le ezt az oszlopot, és tekintsük a maradék mátrixot. Ha ennek első oszlopában ismét csak 0 elemek vannak, azt is takarjuk le, és ezt addig folytassuk, míg egy olyan oszlopot nem találunk, amelyben van nem 0 elem. Ha ilyen oszlopot nem találunk, az eljárásnak vége, a mátrix lépcsős alakú.
2. Ha az első oszlop első sorában álló elem 0, akkor cseréljük ki e sort egy olyannal, melynek első eleme nem 0. Így olyan mátrixot kaptunk, amelyben $a_{11} \neq 0$.
3. Vegyük az i-edik sort $i = 2$-től $i = m$-ig, és ha a sor első eleme $a_{i1} \neq 0$, akkor az első sor $-a_{i1}/a_{11}$-szeresét adjuk hozzá. Mivel $a_{i1} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{11} = 0$, ezért e lépés után az a_{11} alatti elemek 0-vá válnak.
4. A fenti átalakítás után takarjuk le az első sort és az első oszlopot. Ha ekkor nem marad a mátrixban több sor, vége az eljárásnak, a korábban letakart sorokat feltárva megkaptuk a lépcsős alakot. Egyébként ugorjunk vissza az 1. lépéshez, és folytassuk az eljárást.

Világos, hogy ez az eljárás véges sok lépésben véget ér, melynek eredményeként eljutunk az eredeti mátrix egy lépcsős alakjához. □

Egy *inhomogén lineáris egyenletrendszerhez tartozó homogén lineáris egyenletrendszeren* azt a homogén egyenletrendszert értjük, melyet az inhomogénből a konstans tagok 0-ra változtatásával kapunk.

2.43. példa (Homogén lineáris egyenletrendszer megoldása). *Oldjuk meg a 2.41. példabeli egyenletrendszerhez tartozó homogén lineáris*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszert.

Megoldás. Mivel homogén lineáris egyenletrendszerről van szó, a megoldáshoz szükségtelen a bővített mátrixot használni, hisz annak utolsó oszlopa csak nullákból áll, így az elemi sorműveletek alatt nem változik. Az együtthatómátrix lépcsős alakja ugyanazokkal a sorműveletekkel megkapható, mint a 2.41. példa megoldásában, azaz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ 2x_3 + x_4 \phantom{{}+x_5} &= 0 \end{aligned}$$

Innen a megoldás is ugyanúgy kapható meg, sőt, ugyanaz a lineáris kombináció szerepel benne, csak a konstans tagok nem szerepelnek:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-2s - \frac{3}{2}t - u, s, -\frac{1}{2}t, t, u),$$

vagy mátrixjelöléssel

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A homogén és inhomogén egyenletrendszerek e példából sejthető kapcsolatára még visszatérünk a **??** tételben. □

Végül egy alkalmazás:

2.44. példa (Síkok metszésvonalának meghatározása). *Határozzuk meg az alábbi két sík metszésvonalának explicit (paraméteres) alakját!*

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 3x + 4y \phantom{{}+z} &= 2 \end{aligned}$$

Megoldás. A fenti egyenletekkel megadott két sík metszésvonalának meghatározásához, pontosabban a metszésvonal explicit, paraméteres egyenletrendszerének felírásához egyszerűen meg kell oldani a két egyenletből álló egyenletrendszert:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\3&4&0&2\end{array}\right]\overset{S_2-3S_1}{\Longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&-3&-1\end{array}\right]\Longrightarrow\begin{aligned}x+y+\ z&=\ \ 1\\y-3z&=-1\end{aligned}$$

Ebből $z=t$ paraméterválasztással $y=-1+3t$ és $x=2-4t$, azaz

$$(x,y,z)=(-4t+2,3t-1,t)=(2,-1,0)+t(-4,3,1),$$

vagy mátrixjelöléssel

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-4\\3\\1\end{bmatrix}.$$

□

Redukált lépcsős alak A 2.30. példa második megoldási módszerében átlós alakra hoztuk az együtthatómátrixot, azaz nem elégedtünk meg azzal, hogy a főelemek alatt kinulláztunk minden együtthatót, hanem a főelemeket 1-re változtattuk a sor beszorzásával, és a főelemek fölött is kinulláztunk minden elemet, más szóval elimináltunk.

2.45. DEFINÍCIÓ (REDUKÁLT LÉPCSŐS ALAK). *Egy mátrix* redukált lépcsős, *vagy* redukált sorlépcsős alakú, *ha kielégíti a következő feltételeket:*

1. *lépcsős alakú;*
2. *minden főelem egyenlő* 1*-gyel;*
3. *a főelemek oszlopaiban a főelemeken kívül minden elem* 0*;*

A főelemet itt vezéregyesnek *vagy* vezető egyesnek *is szokás nevezni.*

2.46. PÉLDA (REDUKÁLT LÉPCSŐS ALAK). *A következő mátrixok redukált lépcsős alakúak:*

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&-2&0&-4\\0&0&1&6\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Minden valós, vagy racionális elemű mátrix redukált lépcsős alakra hozható, azonban az egészegyütthatós mátrixok általában nem, ha az egészeken belül akarunk maradni. De az egészegyütthatós mátrixok is redukált lépcsős alakra hozhatók a racionálisok számkörében. Az kiküszöbölés lépéseinek követésére használható a SagePlayer redukált lépcsős alak című szemléltető munkalapja.

2.47. PÉLDA (REDUKÁLT LÉPCSŐS ALAKRA HOZÁS). *Hozzuk redukált lépcsős alakra az*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixot!

MEGOLDÁS. Egy lehetséges megoldás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{\substack{S_2-S_1 \\ S_3-2S_1}}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \overset{-\frac{1}{2}S_2}{\Longrightarrow}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \overset{S_3+4S_2}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{S_1-3S_2}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Egy másik lehetséges megoldás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{S_1\leftrightarrow S_2}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{\substack{S_2-S_1 \\ S_3-2S_1}}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{-\frac{1}{2}S_2}{\Longrightarrow}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{S_1-3S_2}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bár különböző úton, de mindkétszer azonos eredményre jutottunk. Valóban, hamarosan be fogjuk látni, hogy a redukált lépcsős alak egyértelmű, míg e példából is látjuk, hogy a lépcsős alak nem: a megadott mátrixnak a megoldás során négy különböző lépcsős alakját is előállítottuk. □

Gauss – Jordan-módszer A *Gauss – Jordan-módszer*, más néven *Gauss – Jordan-kiküszöbölés* vagy *Gauss – Jordan-elimináció* a lineáris egyenletrendszerek egy megoldási módszere. Lényege, hogy a lineáris egyenletrendszer bővített mátrixát elemi sorműveletekkel *redukált* lépcsős alakra hozzuk. Ebből az alakból azonnal leolvasható a megoldás. Adjunk új megoldást a Gauss-módszernél bemutatott egyenletrendszerekre.

2.48. PÉLDA (GAUSS – JORDAN-MÓDSZER, EGY MEGOLDÁS). *Oldjuk meg a 2.40. példában felírt egyenletrendszert Gauss – Jordan-módszerrel!*

MEGOLDÁS. Felírjuk az egyenletrendszer bővített mátrixát, és a 2.40. példában látott módon eljutunk a lépcsős alakhoz, majd folytatjuk:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\2&2&3&2\\1&3&3&4\\1&2&1&5\end{array}\right]\Longrightarrow\dots\Longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\0&2&1&4\\0&0&-1&2\\0&0&0&0\end{array}\right]\overset{\substack{\frac12 S_2\\-S_3}}{\Longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\0&1&\frac12&2\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right]\overset{S_1-S_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac32&-2\\0&1&\frac12&2\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right]\overset{\substack{S_2-\frac12 S_3\\S_1-\frac32 S_3}}{\Longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&3\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right]\Longrightarrow\begin{array}{rl}x&=1\\y&=3\\z&=-2\end{array}$$

Tehát az egyenletrendszer egyetlen megoldása $(x,y,z)=(1,3,-2)$. □

2.49. PÉLDA (GAUSS–JORDAN-MÓDSZER, VÉGTELEN SOK MEGOLDÁS). *Oldjuk meg a 2.41. példabeli*

$$\begin{aligned}x_1+2x_2+x_3+2x_4+x_5&=1\\x_1+2x_2+3x_3+3x_4+x_5&=0\\3x_1+6x_2+7x_3+8x_4+3x_5&=1\end{aligned}$$

egyenletrendszert Gauss–Jordan-módszerrel!

MEGOLDÁS. A 2.41. példában eljutottunk egy lépcsős alakig. Az eljárást folytatjuk, míg a redukált lépcsős alakra nem jutunk.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}1&2&1&2&1&1\\1&2&3&3&1&0\\3&6&7&8&3&1\end{array}\right]\Longrightarrow\dots\Longrightarrow\left[\begin{array}{ccccc|c}1&2&1&2&1&1\\0&0&2&1&0&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]\overset{\substack{1/2S_2\\S_1-S_2}}{\Longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}1&2&0&3/2&1&3/2\\0&0&1&1/2&0&-1/2\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]\Longrightarrow\begin{array}{rl}x_1+2x_2\quad+\dfrac32x_4+x_5&=\dfrac32\\x_3+\dfrac12x_4\qquad&=-\dfrac12\end{array}$$

Végezzük el az $x_2=s$, $x_4=t$, $x_5=u$ helyettesítést, az x_1 és x_3 változók azonnal kifejezhetők. Így a megoldás:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(\frac32-2s-\frac32t-u,s,-\frac12-\frac12t,t,u),$$

vagy mátrixjelöléssel

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac32-2s-\frac32t-u\\s\\-\frac12-\frac12t\\t\\u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac32\\0\\-\frac12\\0\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-\frac32\\0\\-\frac12\\1\\0\end{bmatrix}+u\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Természetesen ugyanazt a megoldást kaptuk, mint a 2.41. példában. □

A redukált lépcsős alak egyértelműsége Fontos következményei vannak a következő tételnek:

2.50. TÉTEL (A REDUKÁLT LÉPCSŐS ALAK EGYÉRTELMŰ). *Minden mátrix redukált lépcsős alakra hozható, amely egyértelmű.*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel indirekt módon, hogy van egy olyan mátrix, mely elemi sorműveletekkel két különböző redukált lépcsős alakra hozható. Jelölje ezeket $\mathbf{R}$ és $\mathbf{S}$. Mivel mindketten ugyanazzal a mátrixszal ekvivalensek, elemi sorműveletekkel egymásba alakíthatóak, vagyis egymással is ekvivalensek. Válasszuk ki oszlopaik közül azt a balról első oszlopot, melyben különböznek, valamint az összes előttük álló vezéroszlopot. Az így kapott mátrixokat jelölje $\hat{\mathbf{R}}$ és $\hat{\mathbf{S}}$. Tehát $\hat{\mathbf{R}} \neq \hat{\mathbf{S}}$, mert különböznek az utolsó oszlopukban. Például, ha

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

akkor

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ez az oszlop, melyben különböznek, nem lehet az első oszlop, mert ha az a zérusvektor az egyik mátrixban, akkor a sorekvivalencia miatt a másikban is az lenne, egyébként pedig ez az oszlop mindenképp az első helyen 1-est, alatta 0-kat tartalmaz.

Tekintsük az így kapott $\hat{\mathbf{R}}$, $\hat{\mathbf{S}}$ mátrixokat egy-egy egyenletrendszer bővített együtthatómátrixának. Ezek általános alakja tehát a következő:

$$\hat{\mathbf{R}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & r_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{vagy} \quad \hat{\mathbf{R}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

és

$$\hat{\mathbf{S}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & s_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{vagy} \quad \hat{\mathbf{S}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Mivel oszlopok kihagyása nem változtat a sorekvivalencián – hisz elemi sorműveletekben műveletet csak egy oszlopon belül végzünk –, ezért az $\hat{\mathbf{R}}$ és $\hat{\mathbf{S}}$ mátrixok ekvivalensek, azaz a hozzájuk tartozó két egyenletrendszernek ugyanaz a megoldása. Ez csak úgy lehet, ha vagy minden $i = 1, \dots, k$ indexre $r_i = s_i$, vagy egyik egyenletrendszer sem oldható meg, azaz mindkét esetben azt kaptuk, hogy $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{S}}$, ami ellentmondás. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy a kiinduló $\mathbf{R} \neq \mathbf{S}$ feltevés helytelen volt, tehát $\mathbf{R} = \mathbf{S}$. (E bizonyítás Holzmann[3] Interneten publikált cikkén alapul). □

[3]

Mivel a redukált lépcsős alak egyértelmű, definiálhatunk egy függvényt, mely minden mátrixhoz annak ezt az alakját rendeli. Az $\operatorname{rref}(\mathbf{A})$ jelölést mi arra a függvényre fogjuk alkalmazni, mely egy $m \times n$-es r-rangú mátrixhoz a redukált lépcsős alakjának a zérussorok elhagyásával kapott alakját rendeli, mely egy $r \times n$-es mátrix. Például

$$\operatorname{rref}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Szimultán egyenletrendszerek Gyakori feladat az alkalmazásokban, hogy sok olyan egyenletrendszert kell megoldani, amelyek csak a konstans tagokban térnek el egymástól. A kiküszöböléses módszerekkel ezek egyszerre is megoldhatók alig több erőforrás felhasználásával, mint ami egyetlen egyenletrendszer megoldásához szükséges.

2.51. DEFINÍCIÓ (SZIMULTÁN EGYENLETRENDSZEREK). *Több egyenletrendszer halmazát* szimultán egyenletrendszernek *nevezünk, ha együtthatómátrixaik azonosak.*

2.52. PÉLDA (SZIMULTÁN EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA). *Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!*

$$\begin{aligned} x+\ y+\ z&=3 \\ 2x+3y+2z&=7 \\ 2x+2y+3z&=6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u+\ v+\ w&=3 \\ 2u+3v+2w&=7 \\ 2u+2v+3w&=7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} r+\ s+\ t&=0 \\ 2r+3s+2t&=0 \\ 2r+2s+3t&=1 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Mivel e három egyenletrendszer együtthatómátrixa azonos, a bal oldal átalakítását elég egyszer elvégezni, a jobb oldalak átalakítását pedig vele együtt. Ehhez a szimultán egyenletrendszerre a következő bővített mátrixot érdemes képezni:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 7 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 7 & 1 \end{array}\right]$$

A megoldáshoz használjuk a Gauss–Jordan-módszert:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 7 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 7 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{S_2-2S_1 \\ S_3-2S_1}}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{S_1-S_2 \\ S_1-S_3}}{\Longrightarrow}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

és ebből leolvasható mindhárom egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

□

Ha tudjuk, hogy több egyenletrendszerből álló szimultán egyenletrendszerről van szó, mindegyik egyenletrendszerben használhatjuk ugyanazokat a változókat.

2.53. PÉLDA (SZIMULTÁN EGYENLETRENDSZER BŐVÍTETT MÁTRIXA). *Oldjuk meg azt a szimultán egyenletrendszert, melynek bővített mátrixa*

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

MEGOLDÁS. A Gauss – Jordan-módszer lépései:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xRightarrow{S_2 - \frac{5}{2}S_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right] \xRightarrow{2S_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right] \xRightarrow{S_1 - S_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right] \xRightarrow{\frac{1}{2}S_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right]. \qquad \square$$

*Kiküszöbölés $\mathbb{Z}_p$-ben** Ha p prím, akkor a modulo p maradékosztályok közti műveletek rendelkeznek minden olyan tulajdonsággal, melyet a kiküszöbölés során a valós számok körében használtunk. Ennek következtében a Gauss- és Gauss – Jordan-módszerek minden további nélkül használhatók $\mathbb{Z}_p$ fölötti egyenletrendszerekre is. (Lásd még a **??**. oldalon az algebrai testről írtakat.)

2.54. PÉLDA (EGYENLETRENDSZER $\mathbb{Z}_2$ FÖLÖTT). *4-bites kódszavakat küldünk, bitjeit jelölje a, b, c és d. Hibajavító kódot készítünk úgy, hogy minden kódszó végére három paritásbitet teszünk, nevezetesen a $b+c+d$, $a+c+d$ és $a+b+d$ bitet Az összeadás itt természetesen $\mathbb{Z}_2$ fölött értendő. Például a* 0110 *kódszó helyett a* 0110011 *kódszót küldjük. Egy üzenetben az egyik ilyen 7-bites kódszó első 4 bitjét a vevő szerkezet bizonytalanul érzékeli, amit kapunk, az a* $(?,?,?,?,1,0,1)$ *kódvektor. Mi lehetett az eredeti üzenet, ha az utolsó 3 bit biztosan jó?*

MEGOLDÁS. Az a, b, c és d bitek ismeretlenek, csak annyit tudunk, hogy

$$\begin{aligned} b+c+d &= 1 \\ a+\phantom{b+{}} c+d &= 0 \\ a+b+\phantom{c+{}} d &= 1 \end{aligned}$$

Oldjuk meg ezt az egyenletrendszert Gauss – Jordan kiküszöböléssel $\mathbb{Z}_2$ fölött. Ne felejtsük, hogy $\mathbb{Z}_2$-ben $1+1=0$, így $1=-1$, azaz a kivonás nem különbözik az összeadástól.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xRightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xRightarrow{S_3 + S_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xRightarrow{S_3 + S_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xRightarrow[S_1+S_3]{S_2+S_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Visszaírva egyenletrendszerré:

$$\begin{aligned} a \phantom{{}+b} +c &= 0 \\ b+c &= 1 \\ d &= 0 \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből $d = 0$, a másodikból $b = 1 - c$, azaz $b = 1 + c$ és az elsőből $a = -c$, azaz $a = c$. Eszerint c szabad változó, legyen értéke s, a többi kötött. A megoldás általános alakban $(a, b, c, d) = (s, 1 + s, s, 0)$, azaz $(a, b, c, d) = (0, 1, 0, 0) + s(1, 1, 1, 0)$. Az $s = 0$ és az $s = 1$ értékekhez tartozó megoldások tehát: $(0, 1, 0, 0)$ és $(1, 0, 1, 0)$.

Ha az egyenletrendszert vektoregyenletnek tekintjük, akkor az első megoldás azt mutatja, hogy az együtthatómátrix második oszlopa megegyezik a jobb oldallal (és valóban), a második megoldás pedig azt, hogy az első és a harmadik oszlop összege a jobb oldalt adja.

Megjegyezzük e kódról, melyet $[7, 4, 3]_2$ bináris *Hamming-kódnak* neveznek, hogy a kód 16 szóból áll, bármely szavának bármely 4 bitje egyértelműen meghatározza a maradék hármat. Így ha legföljebb 3 bit megváltozik egy szóban, akkor az kimutatható, és ha csak egy bit változik meg, az kijavítható. □

2.55. PÉLDA (EGYENLETRENDSZER $\mathbb{Z}_5$ FÖLÖTT). *Oldjuk meg az alábbi két egyenletrendszert $\mathbb{Z}_5$ fölött.*

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \qquad & 2x + 3y &= 1 \\ 3x + 2y &= 4 \qquad & 3x + 4y &= 3 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. A számolás megkönnyítésére vagy készítsünk osztási táblát, vagy használjuk a **??**. oldalon található **??**. ábra szorzástábláját.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{array}\right] \overset{3S_1}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{array}\right] \overset{S_2 - 3S_1}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

azaz az egyenletrendszernek több megoldása van. Itt ez nem azt jelenti, hogy végtelen sok, hanem azt, hogy legalább egy paraméter végigfut $\mathbb{Z}_5$ összes elemén. Szabad változó az y, legyen $y = s$, így $x = 3 - 4s = 3 + s$, tehát $(x, y) = (3 + s, s)$, azaz a vektorok mátrixjelölésével:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{Z}_5$$

Mivel $\mathbb{Z}_5$-nek öt eleme van, ezért s-nek is ennyi értéke lehet, azaz az első egyenletrendszer összes megoldása $(3, 0)$, $(4, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 4)$. A másik egyenletrendszer megoldása:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{array}\right] \overset{3S_1}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{array}\right] \overset{S_2 - 3S_1}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right],$$

amiből $2y = 4$, azaz $y = 2$, $x + 4 \cdot 2 = 3$, azaz $x = 0$. Tehát a megoldás $(x, y) = (0, 2)$. □

Feladatok

2.14.• LÉPCSŐS ALAK: IGAZ – HAMIS Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül?

a) Egy mátrix minden lépcsős alakjában ugyanannyi nemzérus sor van.

b) Egy mátrix minden lépcsős alakjában ugyanannyi főoszlop (bázisoszlop) van.

c) Minden valós mátrixnak van lépcsős alakja, ami egyértelmű.

d) Különböző mátrixoknak különböző a redukált lépcsős alakjuk.

e) Ha egy mátrix elemi sorműveletekkel egy másikba vihető, akkor redukált lépcsős alakjuk megegyezik.

2.15.• EGYENLETRENDSZEREK: IGAZ – HAMIS Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül?

a) Elemi sorműveletek közben az egyenletrendszer megoldáshalmaza nem változik.

b) Egy lineáris egyenletrendszer nem konzisztens (nincs megoldása), ha több egyenletből áll, mint ahány ismeretlenes (más szóval, ha túlhatározott).

c) Ha egy valósegyütthatós lineáris egyenletrendszernek van két különböző megoldása, akkor végtelen sok is van.

d) Egy homogén lineáris egyenletrendszer mindig megoldható.

Határozzuk meg valamely lépcsős alakját, majd a redukált lépcsős alakját az alábbi mátrixoknak!

2.16. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

2.17. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Ekvivalensek-e az alábbi egyenletrendszerek?

2.18. $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 1 \\ 2x + 3y - 3z = -1 \\ 4x + 2y \phantom{{}-3z} = 8 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ 3x + 3y - 2z = 3 \\ 5x - 3y + 2z = 5 \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 3 \\ 5x \phantom{{}+2y} - 4z = 9 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x - y - 3z = 3 \\ 5x + 5y + 7z = 3 \end{cases}$

2.20. Csak egész számokkal számolva megoldható-e az az egyenletrendszer, melynek bővített mátrixa a következő:

a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 7 & 8 & 3 & 7 \\ 11 & 7 & -2 & 2 \end{array}\right]$ $\qquad$ *b)* $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 7 & 8 & 3 & 7 \\ 11 & 7 & 2 & 2 \end{array}\right]$

2.21. SORMŰVELETEK REVERZIBILITÁSA Mutassuk meg, hogy minden elemi sorművelettel átalakított mátrixhoz van egy olyan sorművelet, mely azt visszaalakítja.

Megoldás a gyakorlatban

Bár e szakasz tartalma elsősorban nem a lineáris algebra, hanem a numerikus analízis témakörébe tartozik, ismerete elengedhetetlen annak, aki a gyakorlatban lineáris algebrai eszközöket alkalmaz. Először a Gauss- és Gauss–Jordan-kiküszöbölés műveletigényét, majd numerikus megbízhatóságának kérdését vizsgáljuk. Ezután az iterációs módszerek lényegét vázoljuk, melyek alkalmazásakor az együtthatómátrix nem változik, így a számítási hibák sem halmozódnak. Ráadásul e módszerek a ritka mátrixokat sem „rontják el”, mint a Gauss-módszer, mely sok zérust ír fölül.

A kiküszöbölés műveletigénye Ahhoz, hogy a lineáris egyenletrendszerek különböző megoldási módszereit össze tudjuk hasonlítani, azt is tudnunk kell, mennyi a műveletigényük. A flop mértékegységről részletesen a függelékben írunk a **??**. oldalon.

2.56. TÉTEL (A KIKÜSZÖBÖLÉS MŰVELETIGÉNYE). *A Gauss- és a Gauss–Jordan-módszer műveletigénye egy n-ismeretlenes, n egyenletből álló egyenletrendszer esetén egyaránt*

$$\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{5n}{6}\ \text{összeadás/kivonás},\quad \frac{n^3}{3}+n^2-\frac{n}{3}\ \text{szorzás/osztás.}$$

azaz összesen

$$\frac{2}{3}n^3+\frac{3}{2}n^2-\frac{7}{6}n\,\text{flop},$$

azaz jó közelítéssel $2n^3/3$ flop.

BIZONYÍTÁS. Először felelevenítünk két elemi összefüggést, amire a bizonyításban szükség van:

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},\quad 1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

A továbbiakban feltételezzük, hogy a kiküszöbölés során a főátlóba kerülő elemek egyike sem 0. A Gauss-módszernél a főátló alatti elemek eliminálásához $\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{3}n$ összeadás és $\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2-\frac{5}{6}n$ szorzás szükséges. A visszahelyettesítés $\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$ összeadásból és $\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$ szorzásból áll. Ha a Gauss–Jordan-módszernél a főátló alatti elemek kiküszöbölése mellett a főátló elemeit is 1-re változtatjuk, az $\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{3}n$ összeadás mellett $\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$ szorzás szükséges. A főátló feletti elemek eliminálásához $\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$ összeadás és ugyanennyi szorzás kell. A számítások részletezését az olvasóra bízzuk. □

Numerikusan instabil egyenletrendszerek A gyakorlati feladatokban gyakran mérési eredményekkel, így nem pontos adatokkal dolgozunk.

2.57. PÉLDA (INSTABIL EGYENLETRENDSZER). *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!*

$$6.73x - 8.97y = 5.61$$
$$4.79x - 6.39y = 3.99$$

Mutassuk meg, hogy az együtthatók 0.01*-dal való megváltoztatása a megoldások nagy megváltozását okozhatja, sőt az is elérhető, hogy az egyenletrendszernek ne legyen, vagy épp végtelen sok megoldása legyen!*

MEGOLDÁS. Az egyenletrendszer megoldása: $x = 1.5$, $y = 0.5$. Az első egyenletben az x együtthatóját újra mérjük, és másodszorra egy századdal kevesebbnek, 6.72-nek adódik. Oldjuk meg ezt az egyenletrendszert is! Az eredmény meglepő módon nagyon messze van az előzőtől: $x \approx -2.26$, $y \approx -2.32$. Újabb mérés az y együtthatóját -8.96-nak mutatja. E két együttható egy századdal való megváltozása után a megoldás messze van mindkét előző eredménytől: $x \approx 4.35$, $y \approx 2.64$. Ha végül az első egyenlet konstans tagját is megváltoztatjuk egy századdal 5.62-re, akkor $x \approx 7.21$, $y \approx 4.78$ lesz az eredmény, ha pedig 5.60-ra, akkor – csemegeként – ismét a kerek $x = 1.5$, $y = 0.5$ értékeket kapjuk.

A fenti egyenletrendszeren tovább változtatva az együtthatókat az is elérhető, hogy végtelen sok megoldása legyen:

$$6.72x - 8.96y = 5.60$$
$$4.80x - 6.40y = 4.00$$

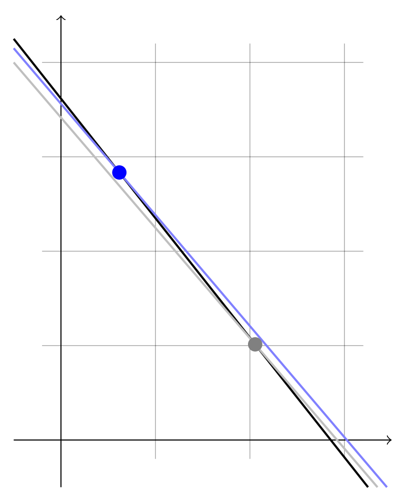
ugyanis itt a két egyenlet egymás konstansszorosa. Ha pedig a második egyenlet konstans tagját visszaírjuk 3.99-re, egy ellentmondó egyenletrendszert kapunk. □

Ilyen megbízhatatlan eredményekkel a gyakorlatban semmit nem lehet kezdeni!

Az olyan egyenletrendszert, melyben az együtthatók vagy a konstans tagok kis változása a megoldásban nagy változást okoz, *numerikusan instabilnak* vagy *rosszul kondicionáltnak* nevezzük. Egyébként *numerikusan stabil*, illetve *jól kondicionált* egyenletrendszerről beszélünk.

Világos, hogy a fentiek nem precíz matematikai fogalmak. Később precízen definiálva számmal fogjuk mérni a kondicionáltság fokát, de azt, hogy egy adott egyenletrendszer megoldásai elfogadhatóak-e vagy nem, csak a feladat döntheti el.

A numerikus instabilitás okát szemlélteti a 2.12. ábra. Kétváltozós egyenletrendszerek esetén, ha a két egyenes grafikonja „közel” van egymáshoz, azaz majdnem egybe esnek, akkor kis változások az egyeneseken messze vihetik a metszéspontot, de párhuzamossá is tehetik a két egyenest.



2.12. ábra: Instabil egyenletrendszer, melyben az egyenletek együtthatóinak kis megváltoztatása a megoldás nagy megváltozását okozza.

Ha a gyakorlatban numerikusan instabil egyenletrendszerrel találkozunk, vizsgáljuk meg, hogy az egyenleteink közti „majdnem” lineáris összefüggőség mögött nem valódi lineáris összefüggőség van-e kis mérési hibával.

Részleges főelemkiválasztás A következő példákban csak tízes számrendszerbeli aritmetikát használunk. A számításokat úgy kell elvégezni, hogy az adott pontosságnak megfelelően minden részeredményt p értékes jegyre kerekítünk.

2.58. PÉLDA (GAUSS-MÓDSZER LEBEGŐPONTOS SZÁMOKKAL). *Oldjuk meg az alábbi – numerikusan stabil – egyenletrendszert pontosan, majd 3 értékes jegy pontossággal számolva.*

$$\begin{aligned} 10^{-4}x + y &= 2 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Pontosan számolva

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{S_2-10^4S_1}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 0 & -1-10^4 & -2\cdot 10^4 \end{array}\right]$$

amiből az eredmény $x = y = \frac{2\cdot 10^4}{1+10^4}$. Igazolható, hogy az egyenletrendszer numerikusan stabil, ami azt jelenti, hogy például 10^{-4} helyébe 0-t helyettesítve, vagyis kicsit változtatva egy együtthatót, a kapott

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

egyenletrendszer megoldása csak kicsit különbözik az előzőtől: $x = y = 2$. Végezzük most el a Gauss-kiküszöbölést 3 értékes jeggyel számolva:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{S_2-10^4S_1}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 0 & -1-10^4 & -2\cdot 10^4 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 0 & -10^4 & -2\cdot 10^4 \end{array}\right],$$

ahol a közelítésnél a $\mathrm{fl}(-1-10^4) = -10^4$ összefüggést használtuk. Az így kapott egyenletrendszernek viszont $x = 0$, $y = 2$ a megoldása, ami nagyon messze van az eredeti egyenletrendszer megoldásától! Most végezzünk egy apró változtatást: először cseréljük fel a két egyenletet!

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 10^{-4} & 1 & 2 \end{array}\right] \overset{S_2-10^{-4}S_1}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1+10^{-4} & 2 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

amelynek megoldása $x = y = 2$, ami nagyon közel van a pontos megoldáshoz! □

Mi az oka a két megoldás közti különbségnek, és fel tudnánk-e használni minél jobb megoldás megtalálásában?

Mindkét megoldásban az első egyenlet konstansszorosát hozzáadtuk a második egyenlethez, de az első esetben a kisebb, a másodikban az első oszlop nagyobb elemét választottuk főelemnek. Amikor a kisebbet választottuk, akkor az első sort egy kis számmal osztottuk, vagyis repciprokával – egy nagy számmal – szoroztuk, és ezt adtuk a második sorhoz. A nagy számmal való beszorzás következtében a második egyenlet együtthatóit „elnyomták” e nagy számok, nagyon megváltoztatva az egyenletet, aminek következtében a megoldások is nagyon megváltoztak! A $\mathrm{fl}(-1-10^4) = -10^4$ kerekítés hatása, vagyis a -1 „eltüntetése”, ekvivalens azzal, mintha az eredeti egyenletrendszer helyett a következőt kéne megoldani:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

És ennek valóban $x = 0$, $y = 2$ a megoldása! Amikor viszont az első oszlop nagyobbik elemét választottuk főelemnek, a sort egy kis számmal kellett beszorozni, és ezt hozzáadni a másik sorhoz, vagyis kerekítéskor az eredeti egyenlet együtthatói megmaradtak, az egyenletrendszer kevésbé torzult. Ennek alapján megfogalmazható egy széles körben elterjedt szabály: a Gauss-féle kiküszöbölési eljárás során, lebegőpontos adatokkal dolgozva minden oszlopban a szóbajöhető elemek közül – sorcserék segítségével – mindig a legnagyobb abszolút értékűt válasszuk főelemnek! E módszert *részleges főelemkiválasztásnak*, illetve *részleges pivotálásnak* nevezik.

Bizonyos – a gyakorlatban ritkán előforduló – esetekben jobb eredmény kapható a *teljes főelemkiválasztás* módszerével. Ekkor főelemnek az összes még hátralévő elem abszolút értékben legnagyobbikát választjuk. Itt oszlopcserékre is szükség van, és műveletigényesebb is ez az eljárás, ezért ritkán alkalmazzák.

2.59. PÉLDA (RÉSZLEGES FŐELEMKIVÁLASZTÁS). *Részleges főelemkiválasztással hozzuk lépcsős alakra az alábbi mátrixot!*

$$\begin{bmatrix} 1.8 & 3.0 & 3.0 & 3.7 & 7.5 \\ 3.6 & 3.2 & 3.6 & 6.2 & 7.8 \\ 7.2 & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 2.4 & 5.4 & 5.2 & 2.6 & 5.2 \end{bmatrix}$$

MEGOLDÁS. Az első oszlop legnagyobb eleme a harmadik sorban van, így az első és a harmadik sor cseréjével kezdünk:

$$\xRightarrow{S_1 \leftrightarrow S_3} \begin{bmatrix} \mathbf{7.2} & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 3.6 & 3.2 & 3.6 & 6.2 & 7.8 \\ 1.8 & 3.0 & 3.0 & 3.7 & 7.5 \\ 2.4 & 5.4 & 5.2 & 2.6 & 5.2 \end{bmatrix} \xRightarrow[S_4 - S_1/3]{\substack{S_2 - S_1/2 \\ S_3 - S_1/4}} \begin{bmatrix} \mathbf{7.2} & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 0.0 & 1.4 & 1.2 & 5.0 & 7.2 \\ 0.0 & 2.1 & 1.8 & 3.1 & 7.2 \\ 0.0 & \mathbf{4.2} & 3.6 & 1.8 & 4.8 \end{bmatrix}$$

$$\xRightarrow{S_1 \leftrightarrow S_3} \begin{bmatrix} \mathbf{7.2} & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 0.0 & \mathbf{4.2} & 3.6 & 1.8 & 4.8 \\ 0.0 & 2.1 & 1.8 & 3.1 & 7.2 \\ 0.0 & 1.4 & 1.2 & 5.0 & 7.2 \end{bmatrix} \xRightarrow[S_4 - S_2/3]{S_3 - S_2/2} \begin{bmatrix} \mathbf{7.2} & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 0.0 & \mathbf{4.2} & 3.6 & 1.8 & 4.8 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.2 & 4.8 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & \mathbf{4.4} & 5.6 \end{bmatrix}$$

$$\xRightarrow{S_3 \leftrightarrow S_4} \begin{bmatrix} \mathbf{7.2} & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 0.0 & \mathbf{4.2} & 3.6 & 1.8 & 4.8 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & \mathbf{4.4} & 5.6 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.2 & 4.8 \end{bmatrix} \xRightarrow{S_4 - S_3/2} \begin{bmatrix} \mathbf{7.2} & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 0.0 & \mathbf{4.2} & 3.6 & 1.8 & 4.8 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & \mathbf{4.4} & 5.6 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & \mathbf{2.0} \end{bmatrix} \quad \square$$

Skálázás A részleges főelemkiválasztásban mindig az oszlop legnagyobb elemét választottuk. Nem lehet egy elemet nagyobbá tenni, és ezzel az egész módszert elrontani úgy, hogy egy sorát egyszerűen beszorozzuk?

2.60. PÉLDA (SOR SZORZÁSA). *A 2.58. példában szorozzuk meg az első egyenletet* 10^5*-nel, azaz a kisebb elemből csináljunk nagyot, és ezt az egyenletrendszert is oldjuk meg részleges főelemkiválasztással.*

$$\begin{aligned} 10x + 10^5 y &= 2 \cdot 10^5 \\ x - \quad y &= \quad 0 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Egy egyenlet beszorzása egy nemzérus számmal ekvivalens átalakítás, így ennek az egyenletrendszernek is $x = y = \frac{2 \cdot 10^4}{1+10^4}$ a pontos megoldása. Ha 3 értékes jegyre számolunk, és alkalmazzuk a részleges főelemkiválasztás módszerét, akkor ismét rossz eredményt kapunk:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10 & 10^5 & 2 \cdot 10^5 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xRightarrow{S_2 - 10 S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 10 & 10^5 & 2 \cdot 10^5 \\ 0 & -1 - 10^4 & -2 \cdot 10^4 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 0 & -10^4 & -2 \cdot 10^4 \end{array}\right],$$

amiből $x = 0$ és $y = 2$. $\square$

Hasonlóképp zavart okozhat az együtthatómátrix egy oszlopának beszorzása is, ami az egyenletrendszeren például úgy valósítható meg, ha egyik változó mértékegységét megváltoztatjuk. (Ha például a korábban kilométerben meghatározott ismeretlent milliméterben keressük, együtthatóját minden egyenletben 10^6-nal kell osztani.)

Az együtthatók ilyen „egyenetlenségeiből” származó számítási hibák csökkentésére a *skálázás* nevű gyakorlati módszer ajánlható. Ez a következő két skálázási szabály követéséből áll, mely a tapasztalatok szerint a gyakorlati feladatok nagy részében nagyon jó eredményt ad a részleges főelemkiválasztással együtt alkalmazva:

1. *Oszlopok skálázása:* Válasszunk a feladatban szereplő mennyiségeknek természetes mértékegységet, ezzel általában elkerülhetők az együtthatók közti tetemes nagyságrendi különbségek. Ezen kívül nincs szükség az oszlopok elemeinek beszorzására.
2. *Sorok skálázása:* Az egyenletrendszer $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ bővített mátrixának minden sorát osszuk el az $\mathbf{A}$ együtthatómátrix adott sorbeli legnagyobb abszolút értékű elemével. Így $\mathbf{A}$ minden sorának 1 a legnagyobb eleme.

Nem ismeretes olyan módszer, mely a lebegőpontos ábrázolás korlátai mellett hatékonyan megtalálná a lehető legpontosabb eredményt. Az elmélet és a tapasztalatok alapján sűrű, nem túlzottan nagy méretű egyenletrendszerekre a skálázott főelem kiválasztásos Gauss-módszer ajánlható. A ritka egyenletrendszerekre a következőkben ismertetendő iteratív módszerek általában jobb eredményt adnak.

Iteratív módszerek A továbbiakban is csak olyan egyenletrendszerekkel foglalkozunk, melyek n-ismeretlenesek és n egyenletből állnak, tehát melyek együtthatómátrixa négyzetes.

Az iteratív módszerek lényege, hogy olyan

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \ldots$$

vektorsorozatot generálunk, mely az adott egyenletrendszer megoldásvektorához konvergál. Első pillanatra meglepőnek tűnhet egy végtelen sorozat generálásával keresni a megoldást, de mivel számításaink eleve csak véges pontosságúak, gyakran igen kevés lépésben elérhetjük a megkívánt pontosságot. Ráadásul a kerekítési hibák még növelhetik is a konvergencia sebességét.

A kiindulási pont – a matematika több más területén is gyümölcsöző módszer – a fixpontkeresés. Ennek lényegét egy egyváltozós függvény példáján mutatjuk be. Legyen f egy minden valós helyen értelmezett függvény, mely bármely két a és b pontot két olyan pontba visz, melyek távolsága a és b távolságának legföljebb a fele. Képletben:

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|b - a|, \text{ azaz } \frac{|f(b) - f(a)|}{|b - a|} \leq \frac{1}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy f összes különbségi hányadosa legfeljebb $1/2$. A sokkal általánosabban megfogalmazható Banach-féle fixpont tétel szerint ekkor egyetlen olyan $\bar{x}$ pont létezik, hogy $\bar{x} = f(\bar{x})$, és ez megkapható úgy, hogy egy tetszőleges x_0 pontból kiindulva képezzük az

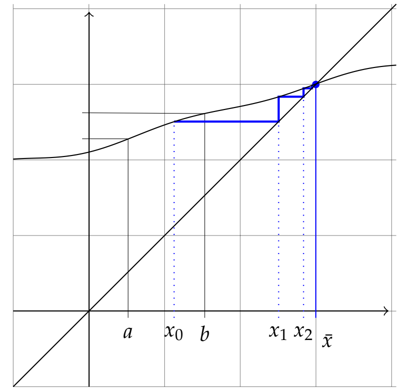
$$x_0,\ x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1), \ldots,\ x_{k+1} = f(x_k), \ldots$$

sorozatot, és vesszük a határértékét. Ekkor

$$\bar{x} = \lim_{k\to\infty} x_k.$$

A 2.13. ábra szemlélteti a fenti állítást. Az 1/2-es szorzó kicserélhető tetszőleges 0 és 1 közé eső konstansra.

A Banach fixponttétel könnyen szemléltethető hétköznapi módon: képzeljük el, hogy egy nagyobb gumilapot néhányan körbeállva egy kerek asztal tetején széthúznak az asztal széléig, majd (most jön a leképezés!) visszaengedik eredeti állapotába. Ekkor igaz az, hogy az asztalon pontosan egy olyan pont van, mely fölött a gumilap helyben marad. E pont megkapható, ha kiválasztunk az asztalon egy tetszőleges P_0 pontot, és megnézzük, hogy a kinyújtott gumilap e fölötti pontja összehúzódáskor hová ugrik, legyen ez a P_1 pont az asztalon. A kinyújtott gumilap P_1 fölötti pontja összehúzódáskor az P_2 pont fölé ugrik, stb. Az így kapott pontsorozat a fixponthoz konvergál.



2.13. ábra: Egy függvény, mely bármely a és b pontot két olyan pontba visz, melyek távolsága a és b távolságának legföljebb a fele, így a függvény minden különbségi hányadosa abszolút értékben legföljebb 1/2. E függvénynek pontosan egy fixpontja van, mely megkapható egy tetszőleges x_0 pontból induló $x_k = f(x_{k-1})$ sorozat határértékeként.

Jacobi-iteráció Az előző paragrafusban leírtakat követve megpróbáljuk az egyenletrendszert átrendezni úgy, hogy az $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$ alakú legyen, ahol $\mathbf{x}$ jelöli az ismeretlenek vektorát.

2.61. PÉLDA (JACOBI-ITERÁCIÓ). *Oldjuk meg a*

$$\begin{aligned} 4x - y &= 2 \\ 2x - 5y &= -8 \end{aligned}$$

egyenletrendszert, majd hozzuk $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$ alakra, és egy tetszőleges $\mathbf{x}_0$ vektorból indulva végezzünk az $\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k)$ formulával iterációt. Számoljunk 3 tizedes pontossággal. Hová tart az így kapott vektorsorozat?

MEGOLDÁS. Az egyenletrendszert kiküszöböléssel megoldva kapjuk, hogy $\mathbf{x} = (1, 2)$ az egyetlen megoldás.

Hozzuk az egyenletrendszert $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$, azaz $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] = f\left(\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]\right)$ alakra. Erre több lehetőség is adódik. Ezek közül talán az a legkézenfekvőbb, hogy az első egyenletből az x-et, a másodikból y-t kifejezzük:

$$\begin{aligned} x &= \frac{y+2}{4} \\ y &= \frac{2x+8}{5} \end{aligned}$$

Válasszunk egy $\mathbf{x}_0$ vektort tetszőlegesen, legyen pl. $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$, azaz $x = y = 0$. A fenti képletekbe helyettesítve kapjuk, hogy $\mathbf{x}_1 = (\frac{0+2}{4}, \frac{0+8}{5}) = (0.5, 1.6)$. A további értékeket egy táblázatban adjuk meg:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_5$	$\mathbf{x}_6$	$\mathbf{x}_7$	$\mathbf{x}_8$
x	0	0.5	0.9	0.95	0.99	0.995	0.999	1.000	1.000
y	0	1.6	1.8	1.96	1.98	1.996	1.998	2.000	2.000

E példa esetén tehát a végtelen sorozat konvergensnek mutatkozott, de a kerekítési hiba folytán véges sok lépés után megtalálta a konvergenciapontot. □

Az általános eset hasonlóan írható le. Tegyük fel, hogy az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\;\;\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

egyenletrendszer egyértelműen megoldható és főátlójának minden eleme különbözik 0-tól. A *Jacobi-iteráció* menete tehát a következő. A k-adik egyenletből fejezzük ki az x_k változót:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 \qquad\quad - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1,n-1}x_{n-1} - a_{1n}x_n) \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 \qquad\quad - \ldots - a_{2,n-1}x_{n-1} - a_{2n}x_n) \\ &\;\;\vdots \\ x_n &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1} \qquad\quad) \end{aligned} \tag{2.25}$$

Válasszunk az ismeretlenek $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektorának egy $\mathbf{x}_0$ kezdőértéket, pl. legyen $\mathbf{x}_0 = (0, 0, \ldots, 0)$. A (2.25) egyenletrendszer jobb oldalába helyettesítsük be $\mathbf{x}_0$ koordinátáinak értékét, a bal oldal adja $\mathbf{x}_1$ koordinátáit. Ezt a lépést ismételjük meg, generálva az $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$,... vektorokat addig, míg el nem érjük a megfelelő pontosságot.

Gauss – Seidel-iteráció A Jacobi-iteráció gyorsaságán könnyen javíthatunk, ha a (2.25) egy egyenletének jobb oldalába való behelyettesítés után a bal oldalon kapott változó értékét azonnal fölhasználjuk, nem várunk vele a ciklus végéig. Ezt a módosított algoritmust nevezzük *Gauss – Seidel-iterációnak*.

2.62. PÉLDA (GAUSS – SEIDEL-ITERÁCIÓ). *Oldjuk meg a*

$$\begin{aligned} 4x - \;\; y &= \;\;\, 2 \\ 2x - 5y &= -8 \end{aligned}$$

egyenletrendszert Gauss – Seidel-iterációval.

MEGOLDÁS. Itt is, mint a Jacobi-iterációnál az

$$\begin{aligned} x &= \frac{y+2}{4} \\ y &= \frac{2x+8}{5} \end{aligned}$$

egyenleteket használjuk, de míg a Jacobi-iterációnál $\mathbf{x}_0 = (0,0)$ kezdőérték után az $x = \frac{0+2}{4} = \frac{1}{2}$, $y = \frac{0+8}{5} = \frac{8}{5}$ értékek következtek, a Gauss – Seidel-iterációnál a második egyenletben 0 helyett már az első egyenletben kiszámolt $x = \frac{1}{2}$ értéket helyettesítjük, azaz $y = \frac{2\frac{1}{2}+8}{5} = \frac{9}{5}$. A további értékeket egy táblázatban adjuk meg de úgy, hogy jelezzük a kiszámítás sorrendjét:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$
x	0	0.5	0.95	0.995	1.000
y	0	1.8	1.98	1.998	2.000

Hasonlítsuk össze az eredményt a Jacobi iterációnál készített táblázattal. □

Mindkét iteráció a 2-ismeretlenes esetben jól szemléltethető. A **??**. és a **??**. ábra

Az iterációk konvergenciája A fenti példákból nem látszik, hogy vajon a Jacobi- és a Gauss – Seidel-iterációk mindig konvergálnak-e.

2.63. PÉLDA (DIVERGENS ITERÁCIÓ). *Oldjuk meg Jacobi- és Gauss – Seidel-iterációval a következő egyenletrendszert:*

$$
\begin{aligned}
x - y &= 2 \\
2x - y &= 5
\end{aligned}
$$

MEGOLDÁS. Alakítsuk át az egyenletrendszert:

$$
\begin{aligned}
x &= \quad y + 2 \\
y &= 2x - 5
\end{aligned}
$$

Először próbálkozzunk Jacobi-iterációval:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_5$	$\mathbf{x}_6$	$\mathbf{x}_7$	$\mathbf{x}_8$
x	0	2	-3	1	-9	-1	-21	-5	-45
y	0	-5	-1	-11	-3	-23	-7	-47	-15

Úgy tűnik, nem konvergens a vektorsorozat, mint ahogy nem tűnik annak a Gauss – Seidel-iterációnál sem:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	
x	0	2	1	-1	-5	-13
y	0	-1	-3	-7	-15	-31

A divergencia leolvasható az iterációkat szemléltető ábrákról is! □

2.64. DEFINÍCIÓ (SORONKÉNT DOMINÁNS FŐÁTLÓJÚ MÁTRIX). *Azt mondjuk, hogy az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix* soronként (szigorúan) domináns főátlóval rendelkezik, *vagy* soronként (szigorúan) domináns főátlójú, *ha a főátló minden eleme abszolút értékben nagyobb a sorában lévő többi elem abszolút értékeinek összegénél, azaz képletben*

$$\begin{aligned}
|a_{11}| &> \qquad\qquad |a_{12}| + \dots + |a_{1,n-1}| + |a_{1n}| \\
|a_{22}| &> |a_{21}| \qquad\quad + \dots + |a_{2,n-1}| + |a_{2n}| \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\
|a_{n-1,n-1}| &> |a_{n-1,1}| + |a_{n-1,2}| + \dots \qquad + |a_{n-1,n}| \\
|a_{nn}| &> |a_{n1}| + |a_{n2}| + \dots + |a_{n,n-1}|
\end{aligned}$$

Hasonlóan definiálható az oszloponként domináns főátlójú mátrix is.

Világos, hogy az alábbi mátrixok soronként domináns főátlójúak:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -10 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -1 & -2 & 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & .25 & .25 & .25 \\ .25 & 1 & .25 & .25 \\ .25 & .25 & 1 & .25 \\ .25 & .25 & .25 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az alábbi mátrixok nem soronként domináns főátlójúak, de sorcserékkel azzá tehetők:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & -2 & 10 \\ -10 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} .25 & .25 & .25 & 1 \\ 1 & .25 & .25 & .25 \\ .25 & .25 & 1 & .25 \\ .25 & 1 & .25 & .25 \end{bmatrix}.$$

Az alábbi egyenletrendszer együtthatómátrixa soronként domináns főátlójú:

$$\begin{aligned} 4x - y &= 11 \\ 2x - 5y &= -17 \end{aligned}$$

2.65. TÉTEL (ELÉGSÉGES FELTÉTEL AZ ITERÁCIÓK KONVERGENCIÁJÁRA). *Ha az n egyenletből álló n-ismeretlenes egyenletrendszer együtthatómátrixa soronként domináns főátlójú, akkor bármely indulóvektor esetén a Jacobi- és a Gauss–Seidel-iteráció is konvergens.*

E tételt nem bizonyítjuk. Megjegyezzük, hogy a tételbeli feltétel nem szükséges, csak elégséges, azaz olyan egyenletrendszeren is konvergens lehet valamelyik iteráció, melynek nem domináns főátlójú az együtthatómátrixa. Hasonló tétel igaz oszloponként domináns főátlójú együtthatómátrixok esetén is.

A domináns főátlójú mátrixokon a Gauss–Seidel-iteráció sosem lassabb, mint a Jacobi-iteráció, sőt, gyakran érezhetően gyorsabb. Az viszont előfordulhat, hogy a Gauss–Seidel-iteráció divergens, míg a Jacobi-iteráció konvergens (ld. 2.23. feladat).

A gyakorlatban ezeknek az iterációknak különböző, hatékonyabb javításait használják. E témában az olvasó figyelmébe ajánljuk a „numerikus módszerek" témában írt könyveket, web-oldalakat.

Feladatok

Jacobi-iteráció

2.22. Oldjuk meg a

$$\begin{aligned} 4x - y &= 8 \\ 2x - 5y &= -5 \end{aligned}$$

egyenletrendszert Jacobi-iterációval! Számoljunk 3, majd 4 értékes jegyre!

Vegyes feladatok

2.23. **Jacobi-iteráció konvergál, Gauss–Seidel-iteráció nem** Írjunk programot annak az állításnak az ellenőrzésére, hogy a

$$\begin{aligned} x \phantom{{}+5/6y} + z &= 0 \\ -x + 5/6y \phantom{{}+z} &= 0 \\ x + 2y - 3z &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszeren a Jacobi-iteráció konvergál, a Gauss–Seidel-iteráció nem.

2.24. **Gauss-elimináció domináns főátlójú mátrixon** Bizonyítsuk be, hogy ha az $\mathbf{A}$ mátrix főátlója soronként domináns, akkor végrehajtható rajta a főelemkiválasztásos Gauss-elimináció sorcsere nélkül!

2.25. **Az iterációk szemléltetése** A A városból elindul egy A jelű vonat a B város felé, vele egyidőben a B városból egy B jelű A felé. A B vonat indulásával egyidőben a B vonat orráról elindul egy légy is A felé, de amint találkozik az A vonattal megfordul, és addig repül, míg a B vonattal nem találkozik, amikor ismét megfordul, stb. Mindhármuk sebessége konstans, de a légy sebessége nagyobb mindkét vonaténál.

1. Egy táblázatban megadjuk mindkét vonat távolságát az indulási helyüktől km-ben mérve azokban a pillanatokban, amikor a légy épp a B vonattal találkozik.

	(x_0, y_0)	(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	(x_3, y_3)
x: távolság A-tól	0	40	48	49.6
y: távolság B-től	0	80	96	99.2

   Számítsuk ki a táblázat egy-két további oszlopát!

2. Milyen messze van A város B-től, ha a légy sebessége 200 km/h?
3. Most egy másik táblázatban megadjuk annak a vonatnak a távolságát az indulási helyétől, amelyik épp találkozik a léggyel:

	y_0	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3
x: távolság A-tól		30		46		49.2	
y: távolság B-től	0		80		96		99.2

   Számítsuk ki a táblázat egy-két további oszlopát!

4. Milyen messze van A város B-től, ha a légy sebessége 200 km/h?
5. Mi köze van e feladatnak a Jacobi- és a Gauss–Seidel-iterációhoz?