

Egyenes és sík

Wetzl Ferenc

2012-09-20

- 1 Egyenes és szakasz
 - Egyenes
 - Szakasz
 - Egyenesvonalú egyenletes mozgás
 - Egyenes és pont távolsága

- 2 Sík
 - Sík egyenlete
 - Sík és egyenes
 - Sík és pont

Definíció

Az adott P_0 ponton áthaladó e egyenes **irányvektor**ának nevezünk minden olyan \mathbf{v} ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$) vektort, amely párhuzamos az e egyenessel.

Tétel (Egyenes explicit vektoregyenlete)

A $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton áthaladó, \mathbf{v} irányvektorú e egyenes **vektoregyenlete**

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad -\infty < t < \infty,$$

ahol \mathbf{r} az e egyenes egy $P(x, y, z)$ pontjának helyvektora, míg \mathbf{r}_0 a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponté.

Megjegyzés

A fenti egyenlet vektorait koordinátás alakba írva:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct).$$

Tétel (Egyenes explicit (paraméteres) egyenletrendszere)

Ha a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pont egy egyenes egyik pontja, irányvektora pedig $\mathbf{v} = (a, b, c)$, akkor az egyenes **explicit egyenletrendszere**

$$x = x_0 + at$$

$$y = y_0 + bt$$

$$z = z_0 + ct$$

ahol a t paraméter az összes valós számon végigfut.

Példa (Egy ponton átmenő, adott vektorral párhuzamos egyenes)

Legyen $P_0(2, -1, 3)$, $\mathbf{v} = (4, 3, 0)$.

Megoldás

$$x = 2 + 4t, y = -1 + 3t, z = 3.$$

Példa (Két ponton átmenő egyenes)

Legyen $P_0(2, -1, 3)$, $P_1(6, 2, 3)$.

Megoldás

$$\overrightarrow{P_0P_1} = (4, 3, 0).$$

$$x = 2 + 4t, y = -1 + 3t, z = 3.$$

Példa (Szakasz paraméterezése)

Paraméterezzük a $P_0(2, -1, 3)$, $P_1(6, 2, 3)$ pontokat összekötő szakasz pontjait.

Megoldás

Az előző példa szerint az egyenes egyenletrendszere:

$x = 2 + 4t$, $y = -1 + 3t$, $z = 3$. A t paraméterű pontot jelölhetjük P_t -vel, hisz a $P_t(x, y, z) = (2 + 4t, -1 + 3t, 3)$ jelöléssel $t = 0$ esetén épp a P_0 , $t = 1$ esetén épp a P_1 pontot kapjuk. Így a $\overline{P_0P_1}$ szakasz paraméterezése:
 $x = 2 + 4t$, $y = -1 + 3t$, $z = 3$, $0 \leq t \leq 1$.

Példa (Egyenes mentén egyenletesen mozgó pont mozgásának leírása)

A $P_0(2, -1, 3)$ pontból 10 távolságegység/időegység sebességgel az $\mathbf{v} = (4, 3, 0)$ irányban haladva, hová jutunk 6 időegység alatt?

Megoldás

Átírva a vektoregyenletet, annak fizikai értelmezés adható:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t |\mathbf{v}| \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \mathbf{r}_0 + t(\text{sebesség})(\text{mozgásirányú egységvektor}).$$

Most a sebesség = 10, egységvektor = $(4/5, 3/5, 0)$, hisz $|\mathbf{v}| = 5$.

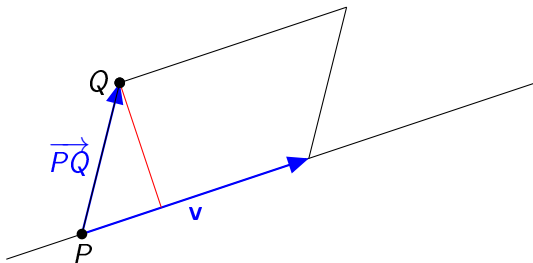
$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + t(\text{sebesség})(\text{mozgásirányú egységvektor}) \\ &= (2, -1, 3) + 6 \cdot 10 \cdot (4/5, 3/5, 0) = (50, 35, 3).\end{aligned}$$

(E példában \mathbf{v} nem a sebességvektor, hisz hossza nem 10, a sebességnek csak az irányát mutatja.)

Tétel (Egyenes és pont távolsága)

A Q pont és a P ponton átmenő \mathbf{v} irányvektorú egyenes távolsága:

$$\frac{|\vec{PQ} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$$



Példa

Mennyi a $Q(-3, 4, -3)$ pont és az $e: x = 1 - 4t, y = 2, z = 3t$ egyenes távolsága?

Megoldás

$$P(1, 2, 0), \overrightarrow{PQ} = (-3 - 1, 4 - 2, -3 - 0) = (-4, 2, -3),$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 2 & -4 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (6, 24, 8)$$

$$|(6, 24, 8)| = 26, \text{ így}$$

$$\frac{|\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{|(6, 24, 8)|}{|(-4, 0, 3)|} = \frac{26}{5}.$$

Definíció

Egy $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ vektort az S sík normálvektorának nevezzük, ha merőleges rá.

Tétel (Sík explicit egyenletei)

A $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton áthaladó (\mathbf{r}_0 helyvektorú), az $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektorok által kifeszített sík

explicit vektoregyenlete: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}.$

explicit egyenletrendszere: $x = x_0 + su_1 + tv_1$

$$y = y_0 + su_2 + tv_2$$

$$z = z_0 + su_3 + tv_3$$

Tétel (Sík implicit egyenletei)

A $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponton áthaladó, $\mathbf{n} = (A, B, C)$ ($\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$) normálvektorú sík

vektoregyenlete:

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0,$$

alapegyenlete:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

általános egyenlete:

$$Ax + By + Cz = D,$$

normálegyenlete:

$$\frac{Ax + By + Cz - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0,$$

ahol $P(x, y, z)$ a sík egy tetszőleges pontja, és $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$.

Normálegyenlet esetén a normálvektor egységvektor.

Példa (Sík egyenletének felírása)

$$P_0(1, -2, 3), \mathbf{u} = (3, 0, 2), \mathbf{v} = (1, -3, 0).$$

Megoldás

Explicit egyenlet és egyenletrendszer:

$$(x, y, z) = (1, -2, 3) + s(3, 0, 2) + t(1, -3, 0)$$

$$x = 1 + 3s + t$$

$$y = -2 - 3t$$

$$z = 3 + 2s$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (6, 2, -9).$$

vektoregyenlet: $(6, 2, -9) \cdot (x - 1, y + 2, z - 3) = 0,$

alapegyenlet: $6(x - 1) + 2(y + 2) - 9(z - 3) = 0,$

általános egyenlet: $6x + 2y - 9z = -25,$

normálegyenlet: $\frac{6x + 2y - 9z + 25}{\sqrt{6^2 + 2^2 + 9^2}} = \frac{6}{11}x + \frac{2}{11}y - \frac{9}{11}z + \frac{25}{11} = 0.$

Példa (Három ponton átmenő sík egyenlete)

$P(1, 0, 0)$, $Q(0, 2, 0)$, $R(0, 0, 3)$.

Megoldás

A normálvektor

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (6, 3, 2),$$

így az alapegyenlet $6(x - 1) + 3(y - 0) + 2(z - 0) = 0$, az általános egyenlet $6x + 3y + 2z = 6$, a normálegyenlet $\frac{6}{7}x + \frac{3}{7}y + \frac{2}{7}z - \frac{6}{7} = 0$.

Példa (Két sík metszésvonalának egyenletrendszere)

$$S_1: 2x + z = 3, \quad S_2: 3y + z = 5$$

Megoldás

$$S_1 \text{ normálvektora: } (2, 0, 1),$$

$$S_2 \text{ normálvektora: } (0, 3, 1),$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-3, -2, 6),$$

Kell keresni még egy közös pontot, azaz a két egyenletből álló egyenletrendszer egy megoldását, ami biztosan létezik, ha a két sík nem párhuzamos. Legyen például $x = -1$, ekkor $z = 5$ és $y = 0$. Az egyenes egyenletrendszere: $x = -1 - 3t$, $y = -2t$, $z = 5 + 6t$.

Példa (Sík és egyenes metszéspontja)

$S: x + 2y + 2z = 3$, $e: x = 3 - t$, $y = 2 + 2t$, $z = 1$.

Megoldás

Behelyettesítjük az egyenes egy pontjának koordinátáit a sík egyenletébe.

Az egyenes egy pontja: $(3 - t, 2 + 2t, 1)$, behelyettesítve:

$(3 - t) + 2(2 + 2t) + 2 \cdot 1 = 3$, azaz $t = -2$. Innen a közös pont:

$(5, -2, 1)$. Ellenőrzés!

Példa (Pont és sík távolsága)

$Q(0, -1, 1)$, $S: x + 2y + 2z = 3$ (normálegyenlete: $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 1 = 0$).

Megoldás

Legyen P az S sík egy tetszőleges pontja, ekkor Q és S távolsága:

$$\left| \overrightarrow{PQ} \cdot \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \right|$$

ahol \mathbf{n} az S sík egy normálvektora. Esetünkben legyen $P(-1, 1, 1)$. Így

$$\left| (1, -2, 0) \cdot \frac{(1, 2, 2)}{3} \right| = |-1| = 1.$$

A feladat mindig megoldható úgy, hogy a Q pont koordinátáit behelyettesítjük a sík normálegyenletének bal oldalába. A kapott érték épp a távolság. (Az előjel azt jelzi, hogy a pont a sík melyik oldalán van.)

$$\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot (-1) + \frac{2}{3} \cdot 1 - 1 = -1.$$