

# Komplex számok

Wetl Ferenc

2012-09-07

- 1 Számok
  - A számfogalom bővülése
  - Egy kis történelem
- 2 Miért számolunk velük?
  - A megoldóképlet egy speciális esetre
  - Alkalmazások
- 3 Számolás komplex számokkal
  - Komplex számok
  - Komplex szám konjugáltja
  - Műveletek komplex számokkal
  - Műveleti tulajdonságok
  - Az algebra alaptétele
  - Binomiális tétel
  - Összefoglalás

- pozitív egészek – összeadás, szorzás
- $a + x = b$  megoldhatósága  $\rightarrow$  negatív számok és 0
- $ax = b$  megoldhatósága  $\rightarrow$  racionális számok
- $x^2 = 2$  megoldása  $\rightarrow$  vannak nem racionális számok is
- sorozatok határértékének fogalma  $\rightarrow$  irracionális számok
- racionális + irracionális számok  $\rightarrow$  valós számok
- és mi van az  $x^2 = -1$  egyenlet megoldhatóságával? Szükség van további bővítésre?

- Girolamo Cardano (1501–1576) orvos, filozófus, matematikus – 1538 körül értesül arról, hogy Scipione del Ferro és Niccolò Tartaglia egymástól függetlenül felfedezték az  $x^3 + px = q$  alakú harmadfokú egyenlet megoldását – 1545-ben megírja „Ars magna sive de regulis algebraicis” című művét, benne a megoldóképlettel – 1552-től kezdődően Európa egyik leghíresebb orvosa – a 60-as évek elején elveszti két fiát (gyilkosságért halál, rablásért száműzetés) – 1570-ben Bolognában bebörtönzik, szabadulása után Rómába költözik
- Scipione del Ferro (1465–1526) felfedezi a harmadfokú egyenlet megoldásának módját – titokban tartja (kivétel Nave, Fiore)
- Niccolò Fontana (1500?–1557) gúnynevén Tartaglia (dadogó) (1511 Brescia, francia dúlás) – 1535: Fiore kihívja Tartagliát egy 15 napos versenyre (30 feladat, a vesztes a győztest és 29 barátját megvendégeli) – felkészüléskor Tartaglia rájön a nehezebb típusú harmadfokú egyenletek megoldásának módjára

- Cardano (kilátásba helyezve Tartaglia tüzérségi találmányainak pártfogót keres, titoktartás ígérete mellett megszerzi a titkot) – amikor Navétól megtudja, hogy del Ferro is ismerte e képleteket, felmentve érzi magát, és publikálja (a negyedfokú esetre is továbbfejlesztve az eredményt)
- Tartaglia leírta „megcsalatasának” történetét
- Milánóban Ferrari (Cardano tanítványa) vitára hívja Tartagliát, aki a vitát elveszti, ennek következtében lehetőségeit (nyilvános előadások) elveszíti

Oldjuk meg az  $x^3 = bx + c$  egyenletet!

A Tartaglia által talált képlet:

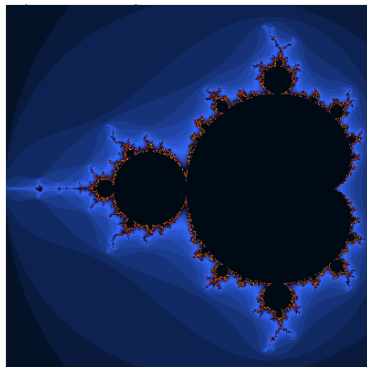
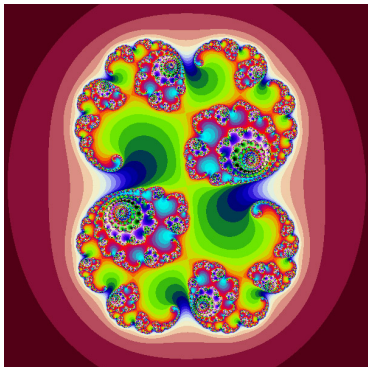
$$x = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}}$$

Oldjuk meg a  $x^3 = 7x + 6$  egyenletet!

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\frac{6}{2} + \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{6}{2} - \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{3}\right)^3}} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt[3]{81 + 30\sqrt{-3}} + \frac{1}{3} \sqrt[3]{81 - 30\sqrt{-3}} \\ &= \frac{1}{3} \left(9/2 + 1/2\sqrt{-3}\right) + \frac{1}{3} \left(9/2 - 1/2\sqrt{-3}\right) \\ &= 3 \end{aligned}$$

- hidrodinamika, áramlások vizsgálata, Zsukov-féle szárnyprofil
- elektromosság, jelfeldolgozás, villamosmérnöki tudományok
- lineáris rendszerek, lineáris differenciálegyenletek megoldása
- relativitáselmélet, kvantummechanika
- fraktálok (Julia- és Mandelbrot-halmazok)
- ...

Egy Julia és egy Mandelbrot halmaz:



## Jelölés

$$i = \sqrt{-1}$$

## Definíció

Az  $a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  alakú kifejezéseket komplex számoknak nevezzük, ahol  $i$  az a szám, melyre  $i^2 = -1$ . Egy komplex szám több alakba is felírható, ezt az alakot **algebrai alak**nak nevezzük. Az  $a$  szám a  $z$  valós része, a  $b$  az imaginárius, jelölése:  $a = \operatorname{Im} z$ ,  $b = \operatorname{Re} z$ . A komplex számok halmazát  $\mathbb{C}$  jelöli.

Komplex számok ábrázolása, komplex számsík, komplex számgömb.

## Definíció

Az  $(a, b)$  vektor  $x$ -tengellyel bezárt szöge legyen  $\varphi$ , hossza  $r$ . Ekkor a  $z = a + ib$  komplex szám felírható  $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  alakban is, hisz  $a = r \cos \varphi$ , és  $b = r \sin \varphi$ . Ezt az alakot **trigonometriai alak**nak, az  $r$  nemnegatív valóst a komplex szám **abszolút értékének**,  $\varphi$ -t **argumentumának** nevezzük:  $r = |z|$ ,  $\varphi = \arg z$ .



## Definíció (konjugált)

$$\bar{z} = a - ib, \text{ ahol } z = a + ib$$

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2, \text{ innen}$$
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

- $z_1 = a_1 + b_1 i = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ ,  
 $z_2 = a_2 + b_2 i = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$
- algebrai alakban: összeadás, kivonás, szorzás algebrai kifejezésként az  $i^2 = -1$  helyettesítést használva; osztás a nevező konjugáltjával való bővítéssel.

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i,$$

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2},$$

- trigonometriai alakban:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \text{ ahol}$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1.$$

## Tétel (Konjugált tulajdonságai)

- 1  $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
- 2  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
- 3  $\overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$
- 4  $\overline{\bar{z}} = z$

## Tétel (Abszolút érték tulajdonságai)

- 1  $|\bar{z}| = |z|$
- 2  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
- 3  $|z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|$
- 4  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

## Tétel (Algebra alaptétele)

Minden komplex-együtthatós  $n$ -edfokú ( $n \geq 1$ ) polinomnak van komplex gyöke.

## Tétel (Algebra alaptétele – változat)

Minden komplex-együtthatós  $n$ -edfokú ( $n \geq 1$ ) polinomnak pontosan  $n$  gyöke van, ha a gyököket multiplicitással számoljuk. Másként fogalmazva minden komplex-együtthatós polinom lineáris tényezők szorzatára bontható. Nevezetesen az

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0, \quad a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$$

egyenlethez léteznek olyan  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$  számok, hogy

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n (x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n),$$

és ez a felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

## Definíció (Binomiális együttható)

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

## Tétel (Binomiális tétel)

Tetszőleges valós vagy komplex  $a$  és  $b$  számokra

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

## Példa

$$(1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i$$

# Amit tudni kell

- 1 Komplex számok algebrai alakja, műveletek (összeadás, kivonás, szorzás, osztás, bővítés a konjugálttal, konjugált tulajdonságai)
- 2 Komplex trigonometriai algebrai alakja, műveletek (szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás)
- 3 Algebra alaptétele
- 4 Binomiális tétel