

MAT A1b – PÓTPÓT-ZH

2010-12-15

Neptunkód: _____ Név: _____

Gyakv: _____

1. Adja meg a következő műveletek eredményét, ha létezik (ha nem, írjuk be, hogy NEM LÉTEZIK): (3 pont)

(**i** + **j**) · **k** =
i × (**j** × **k**) =
i × (**i** × **k**) =

2. Fejezze ki z -t algebrai alakban a következő egyenletekből: (10 pont)

(a) $z^2 + (2i - 4)z - 4i + 4 = 0$,
 (b) $z = (-\sqrt{3} + i)^5$,
 (c) $z^4 = -1 + \sqrt{3}i$.

3. Mennyi legyen α értéke, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{ha } x \neq 1 \\ \alpha & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

függvény folytonos legyen az $x = 1$ helyen? (3 pont)

4. Mekkora az $\mathbf{a} = [-4, 1, 1]$ és $\mathbf{b} = [2, -2, 1]$ vektorok szöge? (3 pont)

5. Adott egy sík és két egyenes: (3 pont)

$S_1 : 3y + 4z = 5$

$e_1 : x = 5, \frac{y-1}{6} = \frac{z-2}{8}$

$e : x = 1 + 5t, y = 2 + 4t, z = 2 - 3t$.

Melyek párhuzamosak és melyek merőlegesek közülük?

6. (a) Mutassuk meg, hogy az $A(1, 1, 1)$, $B(2, 1, 2)$, $C(4, -1, 3)$ és $D(3, -1, 2)$ pontok egy paralelogramma csúcspontjai. (b) Mennyi a paralelogramma területe? (c) Adjuk meg a négy pont síkjának egyenletét! (9 pont)

7. Számítsuk ki az alábbi határértékeket (L'Hospital nélkül)! (8 pont)

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 4}$,

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 4}$,

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x+1} \sin \frac{1}{x}$.

8. Igazoljuk, hogy $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$ (3 pont)

9. Tagadjuk az alábbi állításokat, majd döntsük el, hogy melyik igaz! (5 pont)

(a) Minden egész számra igaz, hogy ha osztható 6-tal, akkor osztható 4-gyel is.

(b) Minden 0-ban folytonos függvénynek van a 0-ban határértéke.

(c) Van olyan vektor, mely párhuzamos az \mathbf{i} vektorral, és merőleges is rá egyúttal.

10. A következő állítások után írja oda, hogy az igaz, vagy hamis. (4 pont)

(a) Ha egy függvény folytonos egy x_0 pontban, akkor ott van határértéke.

(b) Ha egy függvény nem folytonos x_0 -ban, akkor ott nincs határértéke.

(c) Ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, akkor $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

(d) Ha f és g folytonos az a -ban, akkor f/g is.

11. Legyen $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = \sin^2(2x)$. Adjuk meg az $f \circ g$ és $g \circ f$ függvények képletét! (4 pont)

12. Adjuk meg a

$$\cos(x + 2y) + 2x^2y + 4y^3 + \frac{1}{2} = 0$$

görbe érintőegyenésének egyenletét az $(1, -\frac{1}{2})$ pontban. (5 pont)

13. Deriváljuk meg az alábbi függvényeket! (9 pont)

(a) $f(x) = (1 + \operatorname{tg} x)(1 - 2x)^{100}$,

(b) $f(x) = \frac{x^2 + \sin^3(4x)}{2x - 1}$

(c) $f(x) = \sin^3(x^2)$

14. Differenciálható-e f az $x = 3$ helyen, ahol (3 pont)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} & \text{ha } x \neq 3 \\ \frac{1}{4} & \text{ha } x = 3 \end{cases}$$

15. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az

$$f(x) = \frac{x}{(x+2)^2}$$

függvénnyel! (12 pont)

16. Számítsuk ki az alábbi határértékeket! (9 pont)

(a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt[3]{x^2+2}-3}{x^2-3x-10}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2 \operatorname{tg} x}{x^3}$.

17. Számítsuk ki az alábbi integrálokat! (8 pont)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad \int \sin x \cos^2 x + x\sqrt{x} dx$$