

1. Adja meg a következő műveletek eredményét, ha létezik (ha nem, írjuk be, hogy NEM LÉTEZIK): (3 pont)

$$\mathbf{j} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) =$$

$$(\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}) \times \mathbf{k} =$$

$$\mathbf{i} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) =$$

2. Oldja meg a következő egyenleteket: (10 pont)

(a) $z\bar{z}^2 = 1 - i,$

(b) **(1-2)** $(1 - i)^6 = (3 + 2i)z,$

(c) $z^2 + (4 - 3i)z + 2(1 - 3i) = 0.$

3. **(1-2)** Mekkora az $\mathbf{a} = [1, -1, -4]$ és a $\mathbf{b} = [1, 0, 1]$ vektorok szöge? (3 pont)

4. Adott két sík és egy egyenes: (3 pont)

$$S_1 : x + 3y + 4z = 5$$

$$S_2 : 4x - 4y + 2z = 1$$

$$e : x = t + 1, y = t - 1, z = 2.$$

Melyek párhuzamosak és melyek merőlegesek közülük?

5. Egy háromszög csúcsai: (12 pont)

$$A(4, -3, 0), B(3, -1, -1), C(1, -2, 1).$$

(a) **(1-2)** Mennyi a háromszög területe?

(b) **(1-2)** Adja meg a háromszög síkjának egyenletét!

(c) Mekkora szöget zár be ez a sík az xy -síkkal?

(d) **(1-2)** Mi lesz a $P(8, 4, -2)$ pont vetülete a síkon?

6. Számítsuk ki az alábbi határértékeket! (8 pont)

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1}}{x},$

(b) **(1-2)** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x - 1},$

(c) **(1-2)** $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}.$

7. **(1-2)** Igazoljuk, hogy $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$ (3 pont)

8. Tagadjuk az alábbi állításokat! (4 pont)

(a) **(1-2)** Minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan N egész, hogy ha $n > N$, akkor $a_n > 1 - \varepsilon$.

(b) Van olyan c pozitív szám, hogy bármely olyan n egészre, melyre $c < n < 2c$ igaz, hogy $p(n) = 0$.

9. A következő állítások után írja oda, hogy az igaz, vagy hamis. (4 pont)

(a) Ha egy függvénynek van határértéke egy x_0 pontban, akkor ott folytonos.

(b) Ha egy függvény folytonos egy x_0 pontban, akkor ott van határértéke.

(c) Ha egy függvény nem folytonos x_0 -ban, akkor ott nincs határértéke.

(d) Ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, akkor $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

10. Legyen $f(x) = (x + 1)^2$, $g(x) = \cos(3x^2)$. Adjuk meg az $f \circ g$ és $g \circ f$ függvények képletét! (4 pont)

11. Határozzuk meg a $\sin(xy) = 1 + \cos(xy)$ képlettel megadott implicit függvény deriváltját a $P(1, \pi)$ pontban! (4 pont)

12. Deriváljuk meg az alábbi függvényeket! (9 pont)

(a) $f(x) = (\sin^6 x)(x^{10} + 2x)^{100},$

(b) **(1-2)** $f(x) = \frac{\sqrt{x} \cos x}{x + 1}$

(c) $f(x) = \sin^2(x^3)$

13. Mennyi legyen α értéke, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(4x) - 1}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ \alpha & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény folytonos legyen az origóban? Differenciálható lesz-e így ez a függvény az origóban? (6 pont)

14. **(1-2)** Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az

$$f(x) = \frac{x^3}{(x - 1)^2}$$

függvénnyel! (12 pont)

15. Számítsuk ki az alábbi határértékeket! (8 pont)

(1-2) (a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right).$

16. **(1-2)** Számítsuk ki az alábbi integrálokat! (7 pont)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad \int \sin^3 x \cos x - 5x\sqrt{x} dx$$