**1. MAT A1b vizsga. 2012-12-19** Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ____________________

**1.** Egészítsük ki az alábbi állításokat (definíciókat, tételeket) úgy, hogy igazak legyenek. *(18 pont)*

*a) Mikor 0?*

$\mathbf{ab} = 0$ pontosan akkor, ha ..............................

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ pontosan akkor, ha ..........................

$\mathbf{abc} = 0$ pontosan akkor, ha ...........................

*b) A függvényhatárérték definíciója:* Tegyük fel, hogy az $f$ függvény értelmezve van...

Azt mondjuk, hogy $f$ *határértéke* az $a$ helyen $L$, azaz $\lim_{x\to a} f(x) = L$, ha...

*c) Darboux-tétel:* Ha $a$ és $b$ olyan intervallum pontjai, amelyen az $f$ függvény ...
akkor az ......................... függvény az $a$-beli és a $b$-beli értéke közt minden értéket fölvesz.

*d) Bolzano-tétel:* Ha $a$ és $b$ olyan intervallum pontjai, amelyen az $f$ függvény ...
akkor az ........................ függvény az $a$-beli és a $b$-beli értéke közt minden értéket fölvesz.

*e) Lagrange középértéktétele:* Legyen az $f$ függvény...

Ekkor létezik az $(a, b)$ intervallumban legalább egy olyan $c$ pont, amelyre...

*f) Természetes alapú logaritmus:*

$$\ln x := \dots$$

*g) Inverz függvény deriváltja:* Legyen $f$ az $I$ intervallumon értelmezett ................... függvény. Ha $f$ az $I$ minden pontjában diffható, és $f'$ az $I$-n ... ,

akkor $f^{-1}$ az értelmezési tartománya minden pontjában differenciálható, és

$$(f^{-1})'(x) =$$

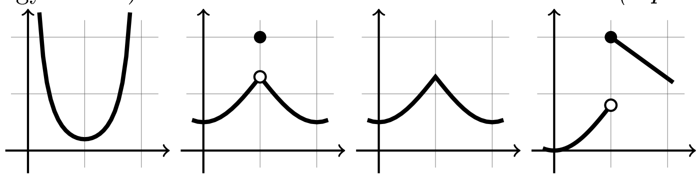
*h) Lokális szélsőérték:* Tegyük fel, hogy $f''$ folytonos az $x = c$ pontot tartalmazó nyílt intervallumon. Ha .................. és ..................., akkor $f$-nek lokális maximuma van az $x = c$ pontban.

*i) Newton–Leibniz-tétel 1. rész:* Ha $f$ ........... az $[a, b]$ intervallumon, akkor az

$$F(x) = \int_{\dots}^{\dots} \dots$$

függvény ........... az $[a, b]$ intervallumon, ........... az $(a, b)$ intervallumon, továbbá igaz a következő összefüggés:

**2.** Minden állítás mellé írjuk oda azoknak az ábráknak a betűjelét (A, B, C vagy D), amelyiken ábrázolt függvényre az állítás igaz. Ha egyikre sem igaz, írjuk oda, hogy EGYIK SEM. (Az A ábrán látható függvénynek az $x = 0$ és $x = 2$ egyenes aszimptotája, az ábrák rácsvonalai 1 egységre vannak egymástól.) *(3 pont)*



A B C D

*(a)* A függvénynek van határértéke az $x = 1$ helyen, de ott nem folytonos: _ _ _ _

*(b)* A függvény folytonos az $x = 1$ helyen, de ott nem differenciálható: _ _ _ _

*(c)* A függvény differenciálható az $x = 1$ helyen, de ott nem folytonos: _ _ _ _

*(d)* A függvény folytonos a $(0, 2)$ intervallumon, és korlátos: _ _ _ _

*(e)* A függvény integrálható a $[0, 2]$ intervallumon: _ _ _ _

**3.** Aláhúzással jelöljük meg a (határérték-számítás szerinti) határozatlan alakokat az alábbiak közül (I/N)! *(2 pont)*

$\frac{\infty}{\infty}$ ☐ $\frac{0}{\infty}$ ☐ $0^\infty$ ☐ $1^\infty$ ☐ $\infty^0$ ☐ $\infty^1$ ☐

**4.** Milyen távol van a $P(1, 2, 1)$ pont az $x = 2t - 1$, $y = 1$, $z = t + 1$ egyenestől? *(3 pont)*

**5.** Oldjuk meg a $\bar{z} = z^3$ egyenletet! (útmutatás: érdemes trigonometrikus alakkal számolni) *(3 pont)*

**6.** Végezzük el az alábbi számításokat! *(11 pont)*

1. $\lim_{x\to 0^+} x\ln x =$

2. $\int_0^{\pi} \sin^2 x \, \mathrm{d}x =$

3. $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1} \, \mathrm{d}x =$ (helyettesítés: $t = e^x$)

4. $\int_0^1 \ln x \, \mathrm{d}x =$

**7.** Mutassuk meg, hogy az $xy'' - 2y' + (x + \frac{2}{x})y = 0$ differenciálegyenletnek az $y(x) = x\sin x$ függvény egy megoldása! *(3 pont)*

**8.** Melyik igaz, illetve hamis (I/H) az alábbi egyenlőségek közül? *(2 pont)*

1. $\int \frac{1}{4x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln|4x| + C$ ☐
2. $\int \frac{1}{4x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln|x| + C$ ☐
3. $\int \frac{1}{4x} \, \mathrm{d}x = \frac{3}{4}\ln\sqrt[6]{6x^2} + C$ ☐

**9.** Bizonyítsuk be, hogy ha $f$ folytonos az $[a,b]$ intervallumon, és $F$ egy primitív függvénye, akkor *(5 pont)*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$