2. MAT A1b vizsga. 2013-01-03 Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ____________________

1. Egészítsük ki az alábbi állításokat (definíciókat, tételeket) úgy, hogy igazak legyenek. *(17 pont)*

a) *A bal oldali határérték végtelen:* Azt mondjuk, hogy f *bal oldali határértéke* az a helyen végtelen, azaz $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$, ha...

b) *Cauchy-féle középértéktétel:* Legyen az f és g függvény...

továbbá a g függvényről tegyük fel, hogy...

Ekkor létezik az (a, b) intervallumban legalább egy olyan c pont, amelyre...

c) *Természetes alapú logaritmus és exponenciális függvény definíciója:*

$$\ln x := \dots$$

$$\exp x := \dots$$

d) *Inverz függvény deriváltja:* Legyen f az I intervallumon értelmezett .... függvény. Ha f az I minden pontjában diffható, és f' az I-n ... ,

akkor f^{-1} az értelmezési tartománya minden pontjában differenciálható, és

$$(f^{-1})'(x) =$$

e) *Lokális szélsőérték:* Tegyük fel, hogy f'' folytonos az $x = c$ pontot tartalmazó nyílt intervallumon. Ha .... és ...., akkor f-nek lokális maximuma van az $x = c$ pontban.

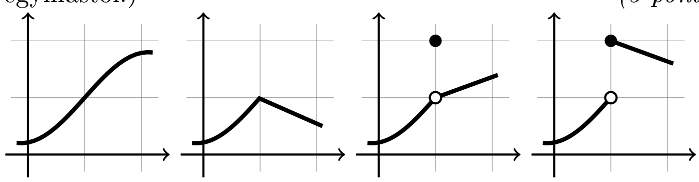
f) *Határozott integrál:* Legyen f az $[a, b]$ intervallumon értelmezett .... függvény. Azt mondjuk, hogy I az f függvény $[a, b]$ intervallumon vett határozott integrálja, ha minden

hogy $[a, b]$ minden olyan $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ felosztására, amelyre $\|P\| < \delta$, bárhogyan is választjuk ki c_k-t az $[x_{k-1}, x_k]$ intervallumból, teljesül, hogy

g) *Függvény átlaga:* Ha f .... az $[a, b]$ intervallumon, akkor az $[a, b]$-n vett átlaga:

$$f_{\text{átlag}} = \dots$$

2. Minden állítás mellé írjuk oda azoknak az ábráknak a betűjelét (A, B, C vagy D), amelyiken ábrázolt függvényre az állítás igaz. Ha egyikre sem igaz, írjuk oda, hogy EGYIK SEM. (Az A ábrán látható függvénynek az $x = 0$ és $x = 2$ egyenes aszimptotája, az ábrák rácsvonalai 1 egységre vannak egymástól.) *(3 pont)*



A B C D

(a) A függvénynek van határértéke az $x = 1$ helyen, de ott nem folytonos: _ _ _ _

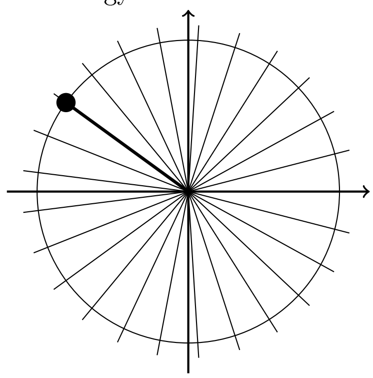
(b) A függvény differenciálható az $x = 1$ helyen, de ott nem folytonos: _ _ _ _

(c) A függvény folytonos az $x = 1$ helyen, de ott nem differenciálható: _ _ _ _

(d) A függvénynek van primitív függvénye a $(0, 2)$ intervallumon: _ _ _ _

(e) A függvény invertálható a $[0, 2]$ intervallumon: _ _ _ _

3. Az alábbi ábrán a komplex számsíkon ábrázolunk egy egységnyi abszolút értékű komplex számot. Rajzoljuk be a komplex ötödik gyökeit! *(2 pont)*



4. Az explicit $\mathbf{x} = (0, 0, 14) + s(3, 6, -2) + t(1, 3, 0)$ egyenlettel megadott síknak írjuk fel az implicit (paramétermentes) egyenletét és számítsuk ki az $(1, 3, 7)$ pontnak e síktól való távolságát! *(4 pont)*

5. Melyik igaz, illetve hamis (I/H) az alábbi egyenlőségek közül, bármely $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 3-dimenziós vektorra és bármely k valós számra? *(3 pont)*

(a) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{a})$

(b) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{c}\times(\mathbf{b}+\mathbf{a})$

(c) $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})$

(d) $k(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = k\mathbf{a}\times k\mathbf{b}$

(e) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a} = \mathbf{0}$

(f) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a} = 0$

6. Végezzük el az alábbi számításokat! *(13 pont)*

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x}{x^2} =$

(b) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x =$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(2x+1)^3}\,\mathrm{d}x =$

(d) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} xe^{-2x}\,\mathrm{d}x =$

7. Mutassuk meg, hogy az $y''-5y'+6y=0$ differenciálegyenletnek az $y(x)=Ae^{2x}+Be^{3x}$ függvény megoldása tetszőleges konstans A és B esetén! *(3 pont)*

8. Bizonyítsuk be, hogy ha f folytonos az $[a,b]$ intervallumon, akkor az

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

függvény f egy primitív függvénye az (a,b) intervallumon! *(5 pont)*