

3. MAT A1b vizsga. 2013-01-09 Neptun: \_\_\_\_\_

Név: \_\_\_\_\_

1. Egészítsük ki az alábbi állításokat (definíciókat, tételeket) úgy, hogy igazak legyenek. (17 pont)

a) *Határérték a végtelenben:* Azt mondjuk, hogy  $f$  *határértéke* a  $-\infty$ -ben  $L$ , azaz  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ , ha...

b) *Közéértéktétel határozott integrálokra:* Ha  $f$  ..... az  $[a, b]$  intervallumon, akkor valamilyen  $c \in [a, b]$ -re

c) *Szélsőértéktétel (Weierstrass-tétel):* Ha  $f$  ..... az  $[a, b]$  zárt intervallumon, akkor  $f$ -nek van  $[a, b]$ -ben és

d) *Cauchy-féle közéértéktétel:* Legyen az  $f$  és  $g$  függvény... továbbá a  $g$  függvényről tegyük fel, hogy... Ekkor létezik az  $(a, b)$  intervallumban legalább egy olyan  $c$  pont, amelyre...

e) *Inverz függvény deriváltja:* Legyen  $f$  az  $I$  intervallumon értelmezett ..... függvény. Ha  $f$  az  $I$  minden pontjában diffható, és  $f'$  az  $I$ -n... , akkor  $f^{-1}$  az értelmezési tartománya minden pontjában differenciálható, és  $(f^{-1})'(x) =$

f) *Polinomok szorzattá alakítása:* Minden valós együtthatós  $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  alakú polinom a tényezők sorrendjétől függetlenül egyértelműen előáll... és alakú tényezők szorzataként.

g) *Határozott integrál:* Legyen  $f$  az  $[a, b]$  intervallumon értelmezett ..... függvény. Azt mondjuk, hogy  $I$  az  $f$  függvény  $[a, b]$  intervallumon vett határozott integrálja, ha minden

hogyan  $[a, b]$  minden olyan  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  felosztására, amelyre  $\|P\| < \delta$ , bárhogyan is választjuk ki  $c_k$ -t az  $[x_{k-1}, x_k]$  intervallumból, teljesül, hogy

2. Adjuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét! (4 pont)

$\arccos x$		
$\ln  x $		
$\operatorname{ch} x$		
$\operatorname{arth} x$		

3. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre! (4 pont)

a) Ha egy függvény páros, és  $+\infty$ -ben az aszimptotája  $y = 2x - 1$ , akkor mi az aszimptotájának egyenlete  $-\infty$ -ben?

b) Ha egy függvény páratlan, és  $+\infty$ -ben az aszimptotája  $y = 2x - 1$ , akkor mi az aszimptotájának egyenlete  $-\infty$ -ben?

c) Van-e olyan differenciálható páros függvény, melynek a deriváltja is páros. Ha igen, adjunk meg egyet!

d) Ha egy függvény páratlan és integrálható a  $[-a, a]$  intervallumon, akkor mennyi az integrálja?

4. Egyszerűsítsük az alábbi kifejezést, és hozzuk algebrai alakra! (2 pont)

$$\frac{9(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})}{3(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6})}$$

5. Milyen feltételekkel azonosak a trigonometrikus alakban megadott  $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  és a  $w = s(\cos \beta + i \sin \beta)$  komplex számok? (2 pont)

6. Számítsuk ki az alábbi kifejezéseket

(13 pont)

(e)  $\int_{-1}^1 x e^{-x^2} dx =$

(a) ha  $\mathbf{abc} = 3$ , akkor mennyi  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{b} - \mathbf{c})(\mathbf{a} - \mathbf{c})$

(b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^{2x} =$

7. Csak a deriváltak segítségével igazoljuk, hogy az  $x^3 + y^3 = 25 + xy$  egyenlettel megadott implicit függvénynek az  $(1, 3)$  pontban szélsőértéke van. Állapítsuk meg, hogy maximum vagy minimum. (3 pont)

(c)  $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$

8. Írjuk le és bizonyítsuk be a L'Hospital-szabály első alakját! (5 pont)

(d)  $\int 3x \sin 2x dx =$