Határérték

„Thomas féle Kalkulus 1"
című könyv alapján készült a könyvet használó hallgatóknak. A képek az eredeti könyv szabadon letölthető prezentációjából valók ((C)Pearson Education, Inc.)

Összeállította: Wettl Ferenc

2006. október 11.

1. Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma
   - Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség
   - A változás átlagos üteme; szelők
   - A hatérérték intuitív fogalma
   - A határtérték számítógépes becslése
2. A határérték precíz definíciója és kiszámítása
   - A határérték definíciója
   - A definíció alkalmazása: identikus és konstans függvény
   - Az adott ε-hoz tartozó δ kiszámítása
   - A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek
   - A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv
3. Kiterjesztések
   - Jobb és bal oldali határértékek
   - (Véges) határérték a végtelenben
   - A végtelen, mint határérték
   - Aszimptoták, domináns tagok

1. Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma
   - Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség
   - A változás átlagos üteme; szelők
   - A határérték intuitív fogalma
   - A határtérték számítógépes becslése
2. A határérték precíz definíciója és kiszámítása
   - A határérték definíciója
   - A definíció alkalmazása: identikus és konstans függvény
   - Az adott ε-hoz tartozó δ kiszámítása
   - A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek
   - A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv
3. Kiterjesztések
   - Jobb és bal oldali határértékek
   - (Véges) határérték a végtelenben
   - A végtelen, mint határérték
   - Aszimptoták, domináns tagok

Példa (Az átlagsebesség meghatározása)

Egy kődarab leválik a szikláról és a mélybe zuhan. Állapítsuk meg a kő átlagsebességét a zuhanás második másodpercében.

Megoldás

Galileo Galilei (1564–1642) **szabadesés törvénye**: t idő alatt megtett út y

$$y = 4,9t^2$$

Átlagsebesség: a megtett Δy távolságot elosztjuk a megtételéhez szükséges Δt nagyságú időtartammal.

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4,9 \cdot 2^2 - 4,9 \cdot 1^2}{2 - 1} = 14,7 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Példa (A pillanatnyi sebesség meghatározása)

Állapítsuk meg a kő pillanatnyi sebességét a $t = 1$s és a $t = 2$s pillanatban.

Megoldás

A kő átlagsebességét egy Δt hosszúságú $[t_0, t_0 + \Delta t]$ időintervallumban:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4,9 \cdot (t_0 + \Delta t)^2 - 4,9 \cdot (t_0)^2}{\Delta t}$$

Δt	Átlagsebesség $[1, 1 + \Delta t]$-ben	Átlagsebesség $[2, 2 + \Delta t]$-ben
1	14,7	24,5
0,01	9,849	19,649
0,0001	9,8000	19,6000

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4,9(t_0 + \Delta t)^2 - 4,9(t_0)^2}{\Delta t} = \frac{9,8t_0\Delta t + 4,9(\Delta t)^2}{\Delta t} = 9,8t_0 + 4,9\Delta t.$$

A pillanatnyi sebességek $t_0 = 1s$ esetén $9,8\frac{m}{s}$, $t_0 = 2s$ esetén $19,6\frac{m}{s}$

Definíció (Átlagos változási sebesség egy intervallumon)

Az $y = f(x)$ függvény **átlagos változási sebessége** az $[x_1, x_2]$ intervallumon:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, \quad h = \Delta x \neq 0$$

Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény értelmezve van egy nyílt intervallumon, amelynek x_0 eleme, *kivéve esetleg magát az x_0 helyet*. Ha az $f(x)$ függvényértékek tetszőlegesen közel kerülhetnek az L számhoz, amennyiben az x értékek eléggé megközelítik x_0-t, akkor azt mondjuk, hogy f az L számhoz tart miközben x tart x_0-hoz; ezt gyakran úgy fejezzük ki, hogy f határértéke az x_0 pontban L. Azt, hogy f határértéke az x_0 helyen L, így jelöljük:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Példa (Határérték és függvényérték)

Vessük össze az alábbi három függvény viselkedését az $x = 1$ pont környezetében.

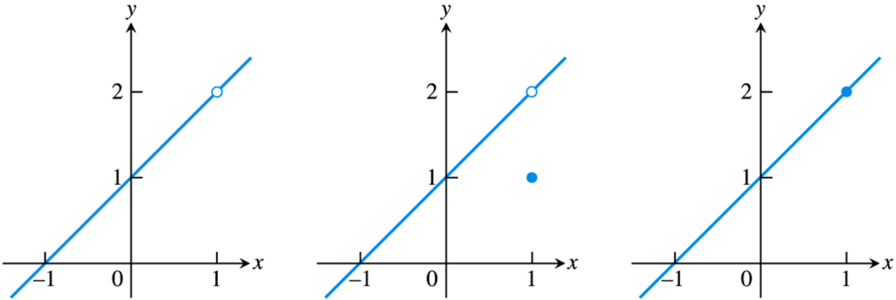
(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

(b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

(c) $h(x) = x + 1$

Megoldás

Látható, hogy $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} h(x) = 1$. Ez a határérték megegyezik $h(1)$ értékével, nem egyezik meg $g(1)$ értékével, f pedig nincs is értelmezve 1-ben.



(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

(b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

(c) $h(x) = x + 1$

FIGURE 2.5 The limits of $f(x)$, $g(x)$, and $h(x)$ all equal 2 as x approaches 1. However, only $h(x)$ has the same function value as its limit at $x = 1$ (Example 6).

Példa (Az identikus és a konstans függvény határértéke)

(a) Ha f az identikus leképezés, azaz minden x-re $f(x) = x$, akkor tetszőleges x_0 esetén

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0} x = x_0.$$

(b) Ha f konstans függvény, azaz minden x-re $f(x) = k$, valamely k számra, akkor tetszőleges x_0 esetén

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0} k = k.$$

Például

$$\lim_{x \longrightarrow 3} x = 3, \qquad \lim_{x \longrightarrow -7} (4) = \lim_{x \longrightarrow 2} (4) = 4.$$

Példa (Amikor nem létezik határérték)

Hogyan viselkednek az alábbi függvények, amikor $x \to 0$?

(a) $U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ (ez az egységugrás függvény)

(b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin\dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

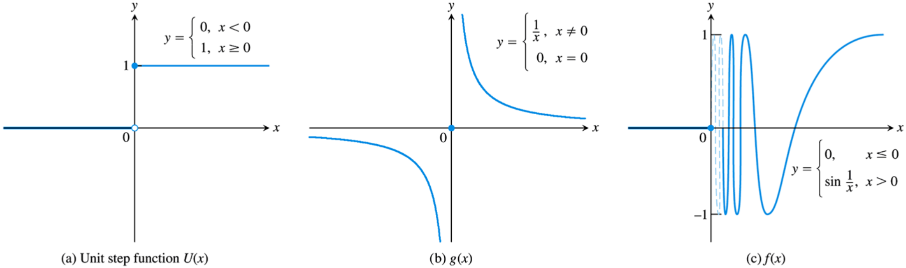


FIGURE 2.7 None of these functions has a limit as x approaches 0 (Example 9).

1. Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma
   - Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség
   - A változás átlagos üteme; szelők
   - A határérték intuitív fogalma
   - A határtérték számítógépes becslése
2. A határérték precíz definíciója és kiszámítása
   - A határérték definíciója
   - A definíció alkalmazása: identikus és konstans függvény
   - Az adott ε-hoz tartozó δ kiszámítása
   - A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek
   - A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv
3. Kiterjesztések
   - Jobb és bal oldali határértékek
   - (Véges) határérték a végtelenben
   - A végtelen, mint határérték
   - Aszimptoták, domináns tagok

Példa (A határérték becslése korlátozott pontosság esetén)

Határozzuk meg a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$ határértéket 6 tizedesjegy pontossággal számoló számológéppel.

Megoldás

Vajon 0,05 vagy 0 vagy egy harmadik szám a határérték? $(0{,}05 = 1/20)$.

x	$f(x)$	
± 1	0,049876	A határérték 0,05?
$\pm 0{,}5$	0,049969	
$\pm 0{,}1$	0,049999	
$\pm 0{,}01$	0,050000	
$\pm 0{,}0005$	0,000000	A határérték 0?
$\pm 0{,}0001$	0,000000	
$\pm 0{,}00001$	0,000000	
$\pm 0{,}0000001$	0,000000	

Példa (tetszőlegesen közel – elég közel)

Legyen $y = 2x - 1$, $x_0 = 4$. Milyen közel legyenek x értékei 4-hez, hogy az $y = 2x - 1$ értékek 7-től való eltérése 2 egységnél kisebb legyen?

Megoldás

x miyen értékei esetén teljesül az $|y - 7| < 2$ egyenlőtlenség? Mivel $|y - 7| = |(2x - 1) - 7| = |2x - 8|$, ezért

$$\begin{aligned} |2x - 8| &< 2 \\ -2 < 2x - 8 &< 2 \\ 6 < 2x - 8 &< 2 \\ 3 < x &< 5 \\ -1 < x - 4 &< 1 \end{aligned}$$

Ha x és $x_0 = 4$ eltérése kisebb, mint 1, akkor y és $y_0 = 7$ eltérése kisebb, mint 2.

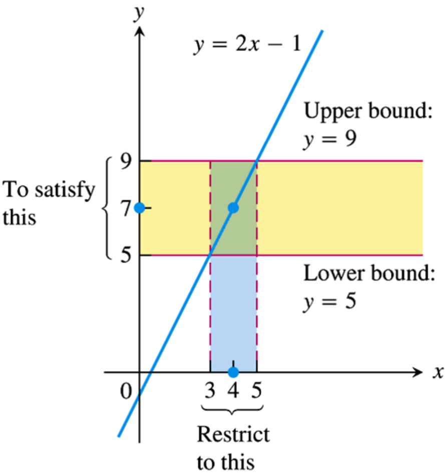


FIGURE 2.12 Keeping x within 1 unit of $x_0 = 4$ will keep y within 2 units of $y_0 = 7$ (Example 1).

1. Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma
   - Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség
   - A változás átlagos üteme; szelők
   - A hatérérték intuitív fogalma
   - A határtérték számítógépes becslése
2. A határérték precíz definíciója és kiszámítása
   - A határérték definíciója
   - A definíció alkalmazása: identikus és konstans függvény
   - Az adott ε-hoz tartozó δ kiszámítása
   - A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek
   - A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv
3. Kiterjesztések
   - Jobb és bal oldali határértékek
   - (Véges) határérték a végtelenben
   - A végtelen, mint határérték
   - Aszimptoták, domináns tagok

Definíció (Függvény határértéke)

Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény értelmezve van valamely, az x_0-t tartalmazó nyílt intervallum – esetleg x_0 kivételével – minden pontjában. Azt mondjuk, hogy $f(x)$ tart L-hez, amint x tart x_0-hoz ($f(x)$ határértéke az x_0 helyen L), szimbolikusan

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = L,$$

ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden x esetén, ha $0 < |x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - L| < \varepsilon$. Formulával:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \ \left[0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \right].$$

1. Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma
   - Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség
   - A változás átlagos üteme; szelők
   - A határérték intuitív fogalma
   - A határtérték számítógépes becslése
2. A határérték precíz definíciója és kiszámítása
   - A határérték definíciója
   - A definíció alkalmazása: identikus és konstans függvény
   - Az adott ε-hoz tartozó δ kiszámítása
   - A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek
   - A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv
3. Kiterjesztések
   - Jobb és bal oldali határértékek
   - (Véges) határérték a végtelenben
   - A végtelen, mint határérték
   - Aszimptoták, domináns tagok

Példa (Az identikus és a konstans függvények határértéke)

Igazoljuk, hogy tetszőleges x_0 esetén (a) $\lim_{x \to x_0} x = x_0$, és (b) $\lim_{x \to x_0} k = k$ (ahol k állandó).

Megoldás

(a) Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot. Találnunk kell egy $\delta > 0$ számot, amelyre teljesül, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ fennállásából $|x - x_0| < \varepsilon$ következik. Ez teljesül, ha $\delta <= \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy $\lim_{x \to x_0} x = x_0$.

(b) Legyen adott egy $\varepsilon > 0$ szám. Olyan δ-t kell találnunk, amelyre teljesül, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ fennállásából $|k - k| < \varepsilon$ következik. Mivel azonban $k - k = 0$, a szóban forgó implikáció bármely pozitív δ esetén igaz. Eszerint tehát $\lim_{x \to x_0} k = k$.

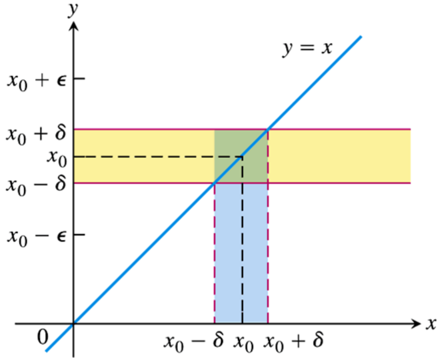


FIGURE 2.16 For the function $f(x) = x$, we find that $0 < |x - x_0| < \delta$ will guarantee $|f(x) - x_0| < \epsilon$ whenever $\delta \leq \epsilon$ (Example 3a).

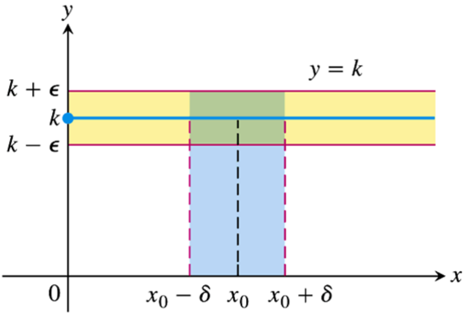


FIGURE 2.17 For the function $f(x) = k$, we find that $|f(x) - k| < \epsilon$ for any positive δ (Example 3b).

Megjegyzés (Hogyan keressük meg az f, L, x_0 és $\varepsilon > 0$ négyesnek megfelelő δ-t?)

Azt a δ-t, amelyre tetszőleges x esetén

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

(1) *Az $|f(x) - L| < \varepsilon$ egyenlőtlenség megoldásával* keressünk egy (a, b) nyílt intervallumot, amelynek minden x_0-tól különböző elemére teljesül az egyenlőtlenség.

(2) *Adjunk meg egy $\delta > 0$ számot,* amelyre teljesül, hogy az x_0 középpontú $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ nyílt intervallum az (a, b) intervallum belsejébe esik.

Példa

Igazoljuk, hogy $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$, amennyiben

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

Megoldás

Bizonyítandó: bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, hogy minden x-re

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon.$$

Megoldás (folytatás)

(1) Keresünk egy nyílt intervallumot, amelynek minden x_0-tól különböző elemére teljesül az $|f(x)-4|<\varepsilon$ egyenlőtlenség.

$$
\begin{gathered}
|x^2-4|<\varepsilon \\
-\varepsilon < x^2-4 < \varepsilon \\
4-\varepsilon < x^2 < 4+\varepsilon \\
\sqrt{4-\varepsilon} < |x| < \sqrt{4+\varepsilon} \\
\sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon}
\end{gathered}
$$

(Gyökvonásnál feltettük, hogy $\varepsilon < 4$.) Tehát ha $x \in (\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon})$ és $x \neq 2$, akkor $|f(x)-4|<\varepsilon$.

(2) Adjunk meg egy $\delta > 0$ számot, melyre $(2-\delta, 2+\delta) \subseteq (\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon})$.

$$\delta = \min\{2-\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon}-2\}.$$

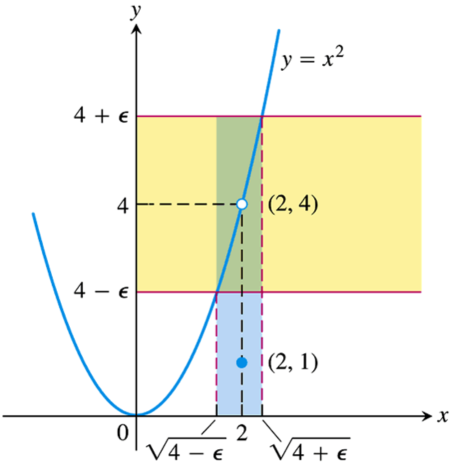


FIGURE 2.20 An interval containing $x = 2$ so that the function in Example 5 satisfies $|f(x) - 4| < \epsilon$.

Tétel (Határértékek és algebrai műveletek)

Legyenek L, M, c és k valós számok. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \text{ és } \lim_{x \to c} g(x) = M.$$

Ekkor léteznek az alábbi határértékek és fennállnak a következők.

(1) Összeg, különbség: $\lim_{x \to c}(f(x) \pm g(x)) = L \pm M$,

(2) Szorzat: $\lim_{x \to c}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$,

(3) Konstanssal való szorzás: $\lim_{x \to c}(k \cdot f(x)) = k \cdot L$,

(4) Hányados: $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (amennyiben $M \neq 0$),

(5) Racionális kitevőjű hatványozás: Ha r és s relatív prím egész számok, továbbá $s \neq 0$, akkor $\lim_{x \to c}(f(x))^{r/s} = L^{r/s}$, feltéve, hogy $L^{r/s}$ valós szám (ha s páros, akkor feltesszük, hogy $L > 0$).

Példa

Igazoljuk, hogy ha $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ és $\lim\limits_{x\to c} g(x) = M$, akkor

$$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = L + M.$$

Megoldás

Legyen adva az $\varepsilon > 0$ szám. Meg kell adnunk egy pozitív δ-t, amelyre teljesül, hogy minden x esetén

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon.$$

A tagokat átrendezve és a háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva:

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \leq \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \end{aligned}$$

Megoldás (folytatás)

A megadott ε-hoz létezik olyan $\delta_1 > 0$ és δ_2, hogy minden x-re

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon/2,$$
$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \varepsilon/2.$$

Ha $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, akkor $0 < |x - c| < \delta$, és így $|f(x) - L| < \varepsilon/2$, és $|g(x) - M| < \varepsilon/2$. Tehát

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ami azt bizonyítja, hogy valóban: $\lim_{x \to c}(f(x) + g(x)) = L + M$.

Tétel

Ha $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$, akkor

$$\lim_{x \to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Tétel

Ha $P(x)$ és $Q(x)$ polinomfüggvények és $Q(c) \neq 0$, akkor

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

1. Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma
   - Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség
   - A változás átlagos üteme; szelők
   - A határérték intuitív fogalma
   - A határtérték számítógépes becslése
2. A határérték precíz definíciója és kiszámítása
   - A határérték definíciója
   - A definíció alkalmazása: identikus és konstans függvény
   - Az adott ε-hoz tartozó δ kiszámítása
   - A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek
   - A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv
3. Kiterjesztések
   - Jobb és bal oldali határértékek
   - (Véges) határérték a végtelenben
   - A végtelen, mint határérték
   - Aszimptoták, domináns tagok

Tétel (Szendvicstétel)

Tegyük fel, hogy valamely, a c pontot tartalmazó nyílt intervallum minden (de legalábbis c kivételével minden) x elemére teljesül $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. Ha ezen felül

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L,$$

akkor fennáll $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ is.

Tétel

Tegyük fel, hogy valamely, a c pontot tartalmazó nyílt intervallum minden (de legalábbis c kivételével minden) x elemére teljesül az $f(x) \leq g(x)$ egyenlőtlenség. Ha mind az f, mind a g függvénynek létezik a határértéke, amint $x \to c$, akkor

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x)$$

is fennáll.

Példa (A szendvicstétel alkalmazása)

Az $u(x)$ függvényről tudjuk, hogy tetszőleges $x \neq 0$ esetén

$$1 - \frac{x^2}{4} \leq u(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Mit mondhatunk a $\lim\limits_{x \to 0} u(x)$ határértékről?

Megoldás

$\lim\limits_{x \to 0}(1 - (x^2/4)) = \lim\limits_{x \to 0}(1 + (x^2/2) = 1$, így $\lim\limits_{x \to 0} u(x) = 1$

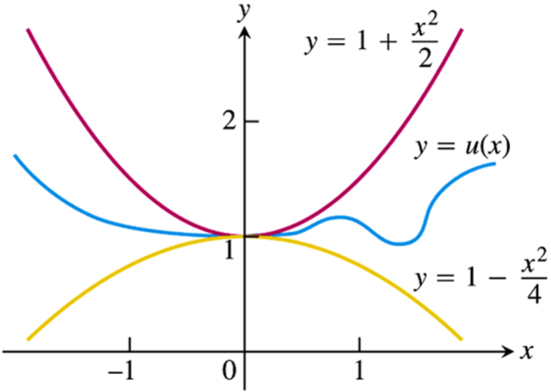


FIGURE 2.10 Any function $u(x)$ whose graph lies in the region between $y = 1 + (x^2/2)$ and $y = 1 - (x^2/4)$ has limit 1 as $x \to 0$ (Example 5).

Példa (A szendvicstétel további alkalmazásai)

(a) $-|\vartheta| \leq \sin\vartheta \leq |\vartheta|$, és $\lim\limits_{\vartheta\to 0}(-|\vartheta|) = \lim\limits_{\vartheta\to 0}(|\vartheta|) = 0$, ezért

$$\lim_{\vartheta\to 0}\sin\vartheta = 0.$$

(b) $0 \leq 1-\cos\vartheta \leq |\vartheta|$, ezért $\lim\limits_{\vartheta\to 0}(1-\cos\vartheta) = 0$, azaz

$$\lim_{\vartheta\to 0}\cos\vartheta = 1.$$

(c) Ha $\lim\limits_{x\to c}|f(x)| = 0$, akkor $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$. Ugyanis $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ és $\lim\limits_{x\to c} -|f(x)| = \lim\limits_{x\to c}|f(x)| = 0$.

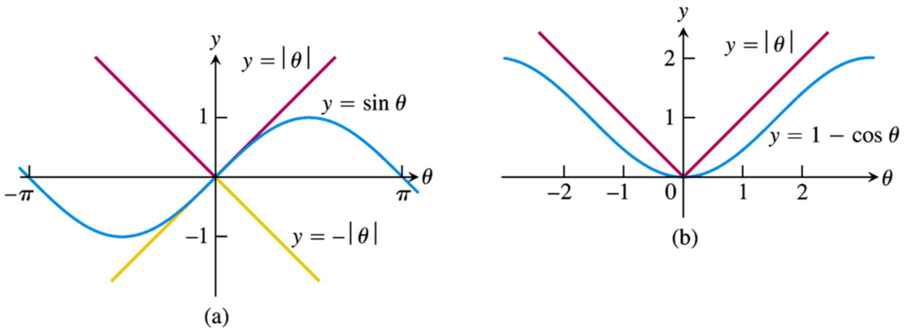


FIGURE 2.11 The Sandwich Theorem confirms that (a) $\lim_{\theta\to 0} \sin\theta = 0$ and (b) $\lim_{\theta\to 0}(1 - \cos\theta) = 0$ (Example 6).

1. Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma
   - Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség
   - A változás átlagos üteme; szelők
   - A hatérérték intuitív fogalma
   - A határtérték számítógépes becslése
2. A határérték precíz definíciója és kiszámítása
   - A határérték definíciója
   - A definíció alkalmazása: identikus és konstans függvény
   - Az adott ε-hoz tartozó δ kiszámítása
   - A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek
   - A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv
3. Kiterjesztések
   - Jobb és bal oldali határértékek
   - (Véges) határérték a végtelenben
   - A végtelen, mint határérték
   - Aszimptoták, domináns tagok

1. Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma
   - Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség
   - A változás átlagos üteme; szelők
   - A határérték intuitív fogalma
   - A határtérték számítógépes becslése
2. A határérték precíz definíciója és kiszámítása
   - A határérték definíciója
   - A definíció alkalmazása: identikus és konstans függvény
   - Az adott ε-hoz tartozó δ kiszámítása
   - A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek
   - A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv
3. Kiterjesztések
   - Jobb és bal oldali határértékek
   - (Véges) határérték a végtelenben
   - A végtelen, mint határérték
   - Aszimptoták, domináns tagok

Definíció (Jobb és bal oldali határérték)

Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény jobb oldali határértéke az x_0 helyen az L szám – jelölése: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0+0} f(x) = L$ –, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, amelyre teljesül, hogy minden x-re

$$x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény bal oldali határértéke az x_0 helyen az L szám – jelölése: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0-0} f(x) = L$ –, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, amelyre teljesül, hogy minden x-re

$$x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

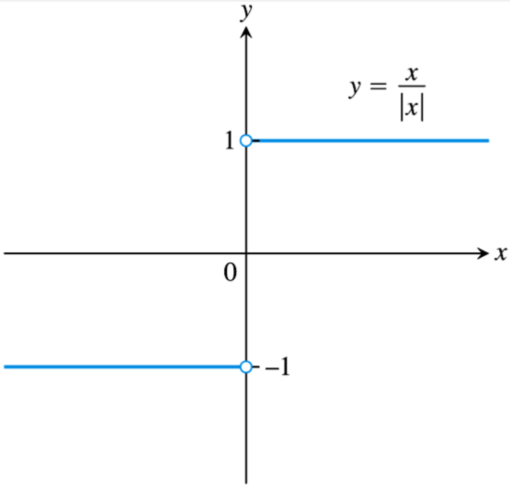


FIGURE 2.21 Different right-hand and left-hand limits at the origin.

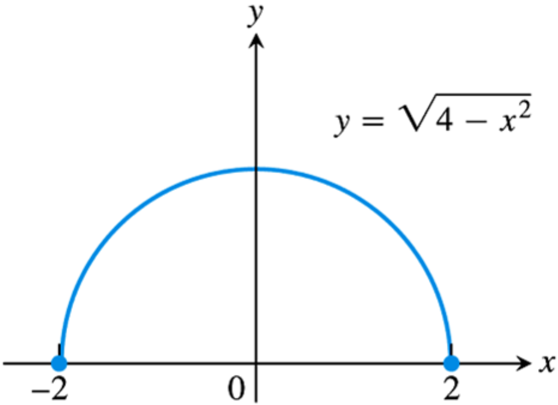


FIGURE 2.23 $\lim_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0$ and $\lim_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0$ (Example 1).

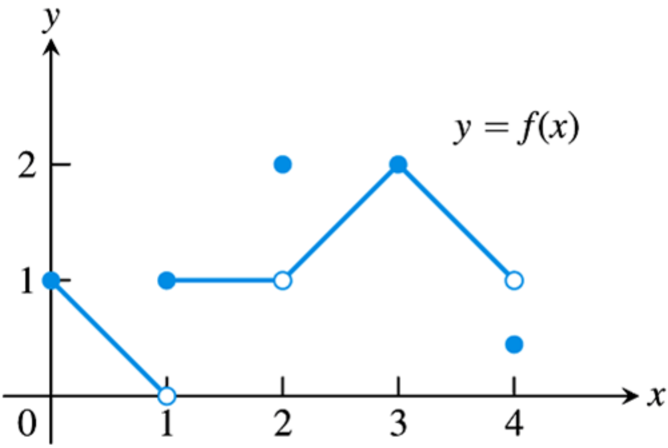


FIGURE 2.24 Graph of the function in Example 2.

Tétel (Jobb és bal oldali határérték és határérték kapcsolata)

Az $f(x)$ függvénynek pontosan akkor létezik a c helyen vett határértéke, ha ugyanitt létezik mind a jobb, mind a bal oldali határértéke és ezek egyenlőek:

$$\lim_{x\longrightarrow c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\longrightarrow c^+} f(x) = L \text{ és } \lim_{x\longrightarrow c^-} f(x) = L.$$

Tétel (A $sin(\vartheta)/\vartheta$ függvény határértéke)

Ha a ϑ szöget radiánban adjuk meg, akkor

$$\lim_{\vartheta\to 0} \frac{\sin\vartheta}{\vartheta} = 1. \tag{1}$$

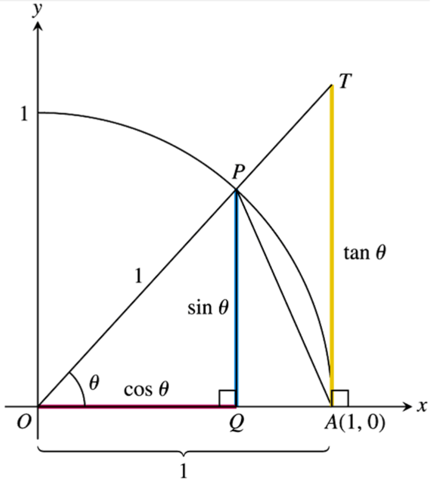


FIGURE 2.30 The figure for the proof of Theorem 7. $TA/OA = \tan\theta$, but $OA = 1$, so $TA = \tan\theta$.

Bizonyítás

Belátjuk: a jobb és a bal oldali határérték 1 $\to$ kétoldali határérték is 1.
1. A jobb oldali határérték 1 ($\vartheta < \pi/2$):

$$OAP \triangle \text{ területe } < \ OAP \text{ körcikk területe } < \ OAT \triangle \text{ területe.}$$

A területek:

$$\begin{aligned}
T_{OAP\triangle} &= \frac{1}{2} \cdot \text{ alap } \cdot \text{ magasság } = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin\vartheta = \frac{1}{2}\sin\vartheta \\
T_{OAP \text{ körcikk}} &= \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \vartheta = \frac{1}{2} \cdot (1)^2 \cdot \vartheta = \frac{\vartheta}{2} \\
T_{OAT\triangle} &= \frac{1}{2} \cdot \text{ alap } \cdot \text{ magasság } = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\vartheta
\end{aligned} \tag{2}$$

Az egyenlőtlenségbe helyettesítve:

$$\frac{1}{2}\sin\vartheta < \frac{1}{2}\vartheta < \frac{1}{2}\operatorname{tg}\vartheta$$

Bizonyítás (folytatás)

$\frac{1}{2}\sin\vartheta$-val osztva ($\sin\vartheta > 0$):

$$1 < \frac{\vartheta}{\sin\vartheta} < \frac{1}{\cos\vartheta}$$

A reciprokokat véve:

$$1 > \frac{\sin\vartheta}{\vartheta} > \frac{\cos\vartheta}{1}$$

a szendvicstétel alapján

$$\lim_{\vartheta\to 0^+} \frac{\sin\vartheta}{\vartheta} = 1$$

2. $\sin\vartheta$ és ϑ páratlan függvények $\to$ $(\sin\vartheta)/\vartheta$ páros $\to$

$$\lim_{\vartheta\to 0^+} \frac{\sin\vartheta}{\vartheta} = \lim_{\vartheta\to 0^-} \frac{\sin\vartheta}{\vartheta} = 1,$$

így $\lim\limits_{\vartheta\to 0} \frac{\sin\vartheta}{\vartheta} = 1$.

1. Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma
   - Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség
   - A változás átlagos üteme; szelők
   - A határérték intuitív fogalma
   - A határtérték számítógépes becslése
2. A határérték precíz definíciója és kiszámítása
   - A határérték definíciója
   - A definíció alkalmazása: identikus és konstans függvény
   - Az adott ε-hoz tartozó δ kiszámítása
   - A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek
   - A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv
3. Kiterjesztések
   - Jobb és bal oldali határértékek
   - (Véges) határérték a végtelenben
   - A végtelen, mint határérték
   - Aszimptoták, domináns tagok

Definíció (Határérték a végtelenben)

1. Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény **határértéke a végtelenben** L – jelölése $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ –, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan M, amelyre teljesül, hogy minden x-re

$$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

2. Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény **határértéke a negatív („mínusz") végtelenben** L – jelölése $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ –, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan N, amelyre teljesül, hogy minden x-re

$$x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Tétel (Végtelenben vett határértékek és algebrai műveletek)

Legyenek L, M és k valós számok. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \text{ és } \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = M.$$

Ekkor léteznek az alábbi határértékek és fennállnak a következők.

(1) Összeg, különbség: $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) \pm g(x)) = L \pm M$,

(2) Szorzat: $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$,

(3) Konstanssal való szorzás: $\lim_{x\to c}(k \cdot f(x)) = k \cdot L$,

(4) Hányados: $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (amennyiben $M \neq 0$),

(5) Racionális kitevőjű hatványozás: Ha r és s relatív prím egész számok, továbbá $s \neq 0$, akkor $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x))^{r/s} = L^{r/s}$, feltéve, hogy $L^{r/s}$ valós szám (ha s páros, akkor feltesszük, hogy $L > 0$).

1. Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma
   - Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség
   - A változás átlagos üteme; szelők
   - A hatérérték intuitív fogalma
   - A határtérték számítógépes becslése
2. A határérték precíz definíciója és kiszámítása
   - A határérték definíciója
   - A definíció alkalmazása: identikus és konstans függvény
   - Az adott ε-hoz tartozó δ kiszámítása
   - A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek
   - A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv
3. Kiterjesztések
   - Jobb és bal oldali határértékek
   - (Véges) határérték a végtelenben
   - A végtelen, mint határérték
   - Aszimptoták, domináns tagok

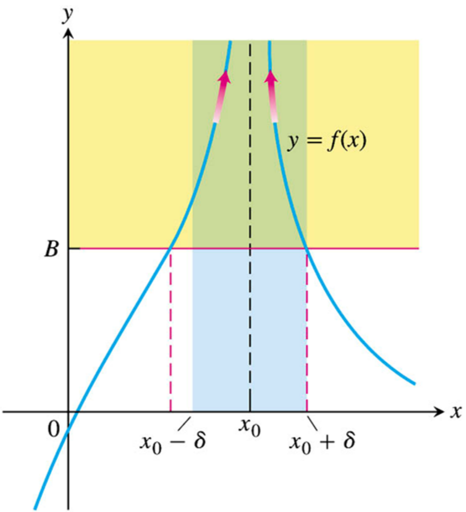


FIGURE 2.40 For $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, the graph of $f(x)$ lies above the line $y = B$.

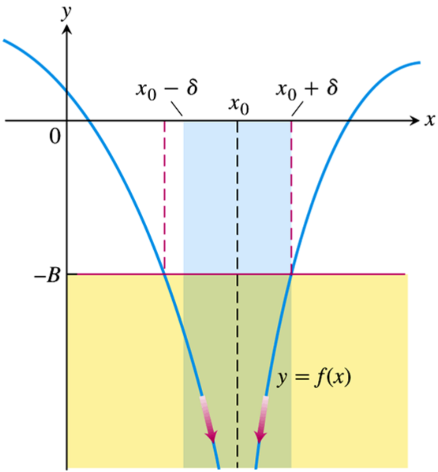


FIGURE 2.41 For $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, the graph of $f(x)$ lies below the line $y = -B$.

Definíció (Végtelen határértékek)

1. Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény határértéke az x_0 helyen végtelen (∞), szimbolikusan

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty,$$

ha tetszőleges B számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, amelyre teljesül, hogy minden x-re

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > B.$$

2. Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény határértéke az x_0 helyen mínusz végtelen ($-\infty$), szimbolikusan

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty,$$

ha tetszőleges B számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, amelyre teljesül, hogy minden x-re

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < B.$$

Példa (A definíció alkalmazása)

Igazoljuk, hogy $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Megoldás

Megmutatjuk, hogy

$$\forall B\, \exists \delta > 0\, \forall x \left[0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > B\right]$$

$\frac{1}{x^2} > B$ pontosan akkor, ha $x^2 < \frac{1}{B}$, azaz ha $|x| < \frac{1}{\sqrt{B}}$. Legyen $\delta \le 1/\sqrt{B}$, akkor minden x-re

$$|x| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} \ge B,$$

azaz

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Definíció (Végtelen határértékek a végtelenben)

1. Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény határértéke a végtelenben végtelen (∞), szimbolikusan

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty,$$

ha tetszőleges pozitív B számhoz létezik olyan M szám, amelyre teljesül, hogy minden x-re

$$x > M \Rightarrow f(x) > B.$$

2. Azt mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény határértéke a végtelenben mínusz végtelen ($-\infty$), szimbolikusan

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty,$$

ha tetszőleges (?negatív?) B számhoz létezik olyan M szám, amelyre teljesül, hogy minden x-re

$$x > M \Rightarrow f(x) < B.$$

1. Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma
   - Átlagsebesség és pillanatnyi sebesség
   - A változás átlagos üteme; szelők
   - A határérték intuitív fogalma
   - A határtérték számítógépes becslése
2. A határérték precíz definíciója és kiszámítása
   - A határérték definíciója
   - A definíció alkalmazása: identikus és konstans függvény
   - Az adott ε-hoz tartozó δ kiszámítása
   - A határértékek kiszámítására vonatkozó tételek
   - A szendvicstétel – rendőrelv – csendőrelv
3. Kiterjesztések
   - Jobb és bal oldali határértékek
   - (Véges) határérték a végtelenben
   - A végtelen, mint határérték
   - Aszimptoták, domináns tagok

Definíció (Függőleges aszimptota)

Az $x = a$ egyenletű egyenes az $y = f(x)$ függvény grafikonjának függőleges aszimptotája, ha

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \text{ vagy ha } \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Példa

$\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\sin x}$, $\frac{1}{\cos x}$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

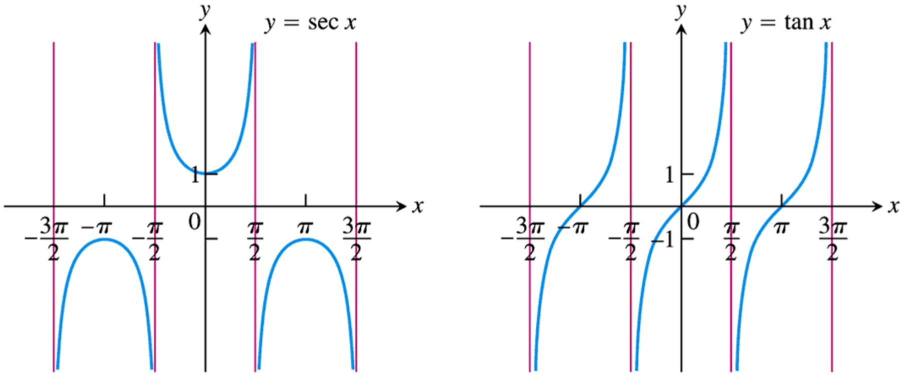


FIGURE 2.45 The graphs of sec x and tan x have infinitely many vertical asymptotes (Example 7).

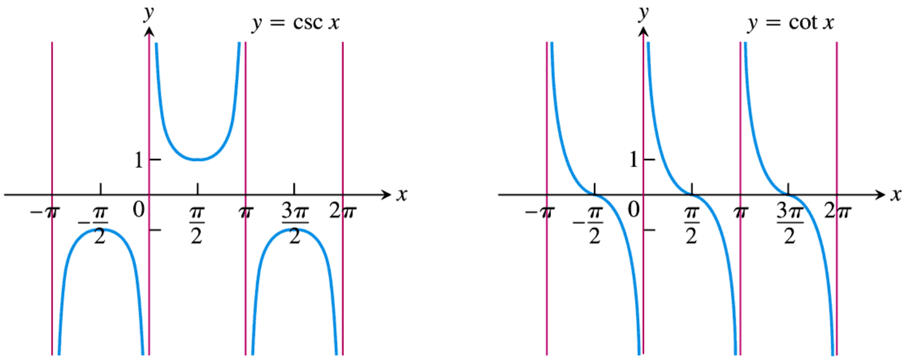


FIGURE 2.46 The graphs of csc x and cot x (Example 7).

Definíció (Vízszintes aszimptota)

Az $y = b$ egyenletű egyenest az $y = f(x)$ függvény grafikonja vízszintes aszimptotájának nevezzük, ha

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \quad \text{vagy} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

Példa

$\frac{1}{x}, \ \frac{1}{x} + \frac{x}{|x|}$

Definíció (Ferde aszimptota (tartalmazza a vízszintest is))

Az $y = ax + b$ egyenletű egyenest az $y = f(x)$ függvény grafikonja ferde aszimptotájának nevezzük, ha

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \quad \text{vagy} \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Megjegyzés

Minden olyan racionális törtfüggvény grafikonjának van ferde aszimptotája, amelyben a számláló fokszáma eggyel nagyobb a nevezőénél (pl. $\frac{2x^3-x}{x^2+x+1}$).
Az a és b meghatározható az

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \text{ és a } b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax)$$

határértékek segítségével, ugyanis $f(x) - (ax + b) \to 0$ miatt
$\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \to 0$, azaz $\frac{f(x)}{x} \to a$.
Ha f racionális törtfüggvény, akkor a polinomosztás hányadosa épp a ferde aszimptota egyenletét adja (mindkét végtelenben azonos).

Példa

$$\frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 1}$$

Megoldás

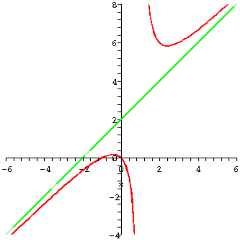
$\dfrac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 1} = x + 2 + \dfrac{2x - 2}{x^2 - 2x + 1}$, tehát az aszimptota egyenlete $y = x + 2$.

Megjegyzés

$\dfrac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 1} = x + 2 + \dfrac{2x - 2}{x^2 - 2x + 1}$, tehát

$$f(x) \approx x + 2 \qquad \text{ha } |x| \text{ elég nagy, illetve}$$

$$f(x) \approx \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 1} \qquad \text{az 1 közelében}$$


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-4
-2
0
2
4
6
x

Példa (Nagy léptékben azonosnak tűnő grafikonok)

Legyen $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6$ és $g(x) = 3x^4$. Mutassuk meg, hogy f és g – bár kisebb számok esetében jelentősen eltérnek – elég nagy abszolút értékű x-ek esetén jó közelítéssel azonosnak tekinthetők.

Megoldás

Számítsuk ki az f és a g függvény hányadosának határértékét $x \to \pm\infty$ esetén:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6}{3x^4} = \\ = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 - \frac{2}{3x} + \frac{1}{x^2} - \frac{5}{3x^3} + \frac{2}{x^4}\right)$$

Elég nagy abszolút értékű x-ek esetén tehát f és g jó közelítéssel azonosnak tekinthető.

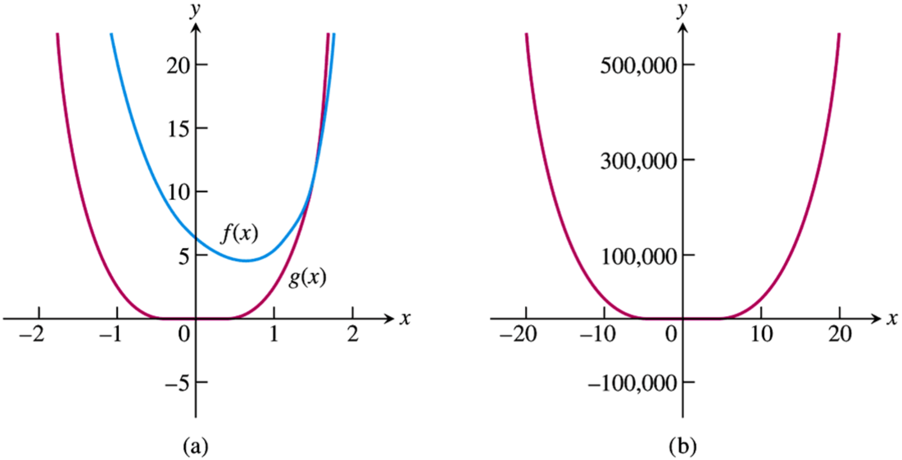


FIGURE 2.48 The graphs of f and g, (a) are distinct for $|x|$ small, and (b) nearly identical for $|x|$ large (Example 9).